



Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 4. 3. 2019 (pre zahraničie 1. 3. 2019)

1.1 Kombinácie Merchu Skladujeme ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Je niekoľko KMS, FKS a KSP tričiek v šiestich krabiciach. Počet KMS tričiek v ľubovoľnej krabici je rovný počtu FKS tričiek vo zvyšných piatich krabiciach dohromady. Podobne, počet FKS tričiek v ľubovoľnej krabici je rovný súčtu KSP tričiek vo zvyšných piatich krabiciach dohromady. Ukážte, že celkový počet tričiek je násobkom 31.

1.2 Kamaráti Mince Strážia ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

V trojsten stánku na Náboji sa vyzbieral nepárny počet mincí na pokrytie výrobných nákladov. Keďže decká na Náboji počítajú, tak Slavo a Miro nemajú čo robiť. Vysypali teda mince na stôl, pričom niektoré zostali otočené hlavou hore a iné znakom hore. V každom ťahu otočili toľko mincí, koľký je to práve ťah, teda v prvom jednu mincu, v druhom dve atď. Ukážte, že je možné otáčať mince tak, aby v jednom momente boli mince otočené tou istou stranou, bez ohľadu na to, ako boli pootáčané na začiatku.

1.3 Kúpili Mi Šatky! ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa a beta**

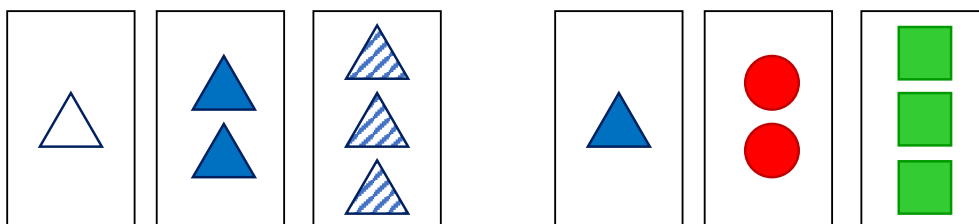
Tomáš triedil trojsten bufky, keď si všimol, že dodávateľ na každú zo 100 bufiek dopísal identifikačné číslo od 1 do 100. Každá trojsten bufka dostala iné číslo. Avšak niektorých k bufiek už bolo predaných a tieto Tomáš nenašiel. Je možné bez ohľadu na to, ktoré bufky boli predané, vybrať zo zvyšných nepredaných bufiek k takých, že súčet ich číselok je 100, ak (a) $k = 9$? (b) $k = 8$?

1.4 Kodaňský Matematický Šarlatán ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa a beta**

Keď sa Kika vrátila z Dánska, tak vyprávala nasledujúcu príhodu: „V Kodani som narazila na šarlatána Mariána. Na stole mal kartovú hru Sety a chcel ma obabrať. Ja som ho však zaskočila otázkou: Koľko je platných setov, ktoré sa skladajú iba z modrých kariet.“ Aká je odpoveď na Kikinu otázku? (Ale neprezradte to Mariánovi!)

Sety sú kartová hra. Každá setová karta má 4 vlastnosti: farbu, tvar, počet a výplň. Každá z týchto vlastností môže na karte nadobúdať tri stavy. Napríklad karta môže mať modrú, červenú alebo zelenú farbu. Príklady kariet môžete vidieť na obrázku. Balík obsahuje všetky rôzne kombinácie týchto vlastností, každú práve raz. *Setom* nazývame v hre takú trojicu kariet, že pre danú vlastnosť sú všetky stavy na kartách buď rovnaké, alebo rôzne. Napríklad jeden modrý prázdny trojuholník, 2 modré plné trojuholníky a 3 modré šrafované trojuholníky tvoria set (trojica na obrázku vľavo). Trojica kariet vpravo tiež tvorí set.



1.5 Kikino Módne Šialenstvo ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Kika si kúpila poncho v tvare lichobežníka. Na lichobežníku $ABCD$ so základňami AB a CD ležia na uhlopriečkach AC a BD po rade body P, Q tak, že platí $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle BQC|$. Ukažte, že platí $|\sphericalangle AQD| = |\sphericalangle BPC|$.

1.6 Kopu Mikín Separujeme

kategórie **alfa** a **beta**

Marek má prebytok UFO mikín, tak si zavolať Kubka a začali sa s nimi hrať. Na začiatku majú na kôpke 360 UFO mikín. Marek rozdelí mikiny na päť neprázdnych kôpok. Potom si Kubko zvolí tri kôpky. Ak celkový počet mikín na kôpkach, ktoré si Kubko vybral, je deliteľný celkovým počtom mikín na zvyšných dvoch kôpkach, tak Marek vyhrá, inak vyhrá Kubko. Kto má víťaznú stratégiu?¹

1.7 Kľukatého Máme Štrkáča

kategórie **alfa** a **beta**

Účastníci spravili na sústreďení hada z ponožiek. Správny účastník v ňom vidí lomenú čiaru v rovine. Hada pozostáva z 38 úsečiek (žiadne dve susedné úsečky nezvierajú priamy uhol). Žiadne dve úsečky sa nepretínajú. Keď predĺžime každú úsečku na priamku, koľko najmenej rôznych priamok môže vzniknúť? (Ak by sa mali dve úsečky predĺžiť na tú istú priamku, tak ju započítame iba raz.)

1.8 Kamaráti Miro Slavomír

kategória **beta**

Keďže Slavo, Miro vyriešili hlavolam s mincami príliš rýchlo a deti ešte počítali tak si našli novú zábavku. Miro povedal Slavovi množinu svojich $n \geq 2$ navzájom rôznych obľúbených kladných celých čísel. Slavo potom napísal najväčšieho spoločného deliteľa a najmenší spoločný násobok každej dvojice Mirových čísel na papier. V závislosti od celého čísla $n \geq 2$ určte, koľko najmenej mohlo byť na papieri rôznych čísel.

1.9 KMS Má SWAG!

kategória **beta**

Na Stanovačke KMS je potrebný KMS $STAN$. Ide o tetivový štvoruholník $STAN$. Na polpriamkach SN a AN sa nachádzajú postupne body P_1, Q_1 a na polpriamkach opačných k polpriamkam SN a AN sa nachádzajú postupne body P_2, Q_2 . Pre tieto body platí $|SP_1| = |SP_2| = |AT|$ a $|AQ_1| = |AQ_2| = |ST|$. Stredy úsečiek P_1Q_1 a P_2Q_2 označíme postupne W a G . Čím je tento KMS $STAN$ výnimočný? Predsa má SWAG! Dokonca, SWAG je obdĺžnik, dokážte to!

1.10 Kľoby Mi Smrdia

kategória **beta**

Jožko má 31 párov ponožiek, ktoré mu vystačia na celý mesiac. Na každú ponožku si chce napísať kladné celé číslo. Na ľavé ponožky čísla $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{31}$ a na pravé ponožky čísla p_1, p_2, \dots, p_{31} . Pre tieto čísla musí platiť

- $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_{31} \leq 4247$,
- $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{31} \leq 4247$,
- $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{31} = p_1 + p_2 + \dots + p_{31}$.

Nájdite najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$|\ell_1 - p_1| + |\ell_2 - p_2| + \dots + |\ell_{31} - p_{31}|.$$

¹Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.