Zadania 2. kola letnej časti

Termín odoslania 1. 4. 2019 (pre zahraničie 29. 3. 2019)

2.1 Keď Malička Som ($\kappa \leq 1$) kategória **alfa**

Jerry má malé nohy, preto si kúpila 13-míľové lodičky, ktorými vie robiť kroky dlhé práve 13 míľ. Postavila sa do mrežového bodu nekonečnej štvorčekovej siete, v ktorej jeden štvorček má stranu dlhú 1 míľu. Kráča však iba po mrežových bodoch. Zistite, či sa takto vie dostať na ľubovoľný mrežový bod na štvorčekovej sieti. Ak áno, ukážte ako, ak nie, dokážte prečo.

2.2 Komplikovanú Máme Stránku ($\kappa \leq 2$) kategória **alfa**

Kubko sa registruje na internetovú stránku. Aby dokázal, že nie je robot, musí nájsť úsečky rovnakej dĺžky.

V trojuholníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 60°$. Nech N je priesečník priamky AC a osi strany AB a nech M je priesečník priamky AB a osi strany AC. Dokážte, že $|CB| = |MN|$.

2.3 Kričiace Mimozemské Stvorenia ($\kappa \leq 3$) kategória **alfa** a **beta**

V kruhu je 100 zelených mimozemšťanov, každý z nich má 100 tabletov. V rámci jedného ťahu ľubovoľný mimozemšťan zoberie niekoľko svojich tabletov a rozdelí ich medzi ostatných mimozemšťanov (nie nutne rovnomerne a nie nutne medzi všetkých). Po akom najmenšom počte ťahov vedia mimozemšťania docieliť, aby žiadni dvaja z nich nemali rovnaký počet tabletov?

2.4 Ktoré Máme Strany? ($\kappa \leq 5$) kategórie **alfa** a **beta**

Bea si vytlačila v KMS-ku skriptá, ktoré majú 2003 strán s číslami 1, 2, …, 2003. Skriptá však nedávajú zmysel, preto si musí z nich vybrať tie správne strany.

Nájdite najväčšiu takú množinu A, ktorá je podmnožinou množiny $\{1, 2, \ldots, 2003\}$ a neexistujú dva prvky a, b množiny A, pre ktoré je číslo $a + b$ deliteľné číslom $a - b$.

2.5 Komunikujeme Medzi Sebou ($\kappa \leq 8$) kategórie **alfa** a **beta**

Vedúci Trojstenu používajú na komunikáciu tri rôzne sociálne siete: Facebook, Google Hangouts a Slack. Každá sociálna sieť funguje nasledovne. Každý vedúci má na nej niekoľko priateľov. Priateľstvá sú vzájomné. Profil každého vedúceho má nejakú farbu, nemusí byť rovnaká na všetkých sociálnych sietiach. Pre farby profilov platí, že profily vedúcich, ktorí sú priateľmi, musia mať rôznu farbu. Ďalej vieme, že na Facebooku stačí vedúcim 42 farieb, na Hangouts 47 farieb a na Slacku 17 farieb.

Keďže vedúci majú chaos v sociálnych sieťach, založili si vlastnú sieť – Perfektne Organizovaný Komunikačný Elektronický Chat (skrátene POKEC). Každý vedúci tam má za priateľov svojich priateľov zo všetkých troch pôvodných sietí. Na POKEC-i platia rovnaké pravidlá pre farby profilov. Dokážte, že profilom vedúcich na POKEC-i stačí 33 558 farieb, a to bez ohľadu na to, koľko je vedúcich a ako sa na jednotlivých sieťach priatelia.

2.6 Keď Meškajú Spoje

kategórie **alfa** a **beta**

Aňa nestíha, taxi zavolala tak si. Z dispečingu jej povedali, že bude čakať $n \cdot 2^{n+1} + 1$ minút. Ale Aňa môže čakať len štvorcový čas. Kotré časy sú pre Aňu vhodné?

Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je číslo $n \cdot 2^{n+1} + 1$ druhou mocninou celého čísla.

2.7 Krásne Múdre Slečny

kategórie **alfa** a **beta**

Keď Slavo v úlohe 8 našiel telku, skúsil ju spustiť. Na programe Jedinečné Obrazové Juchuchú (JOJ) premietajú novú reality šou, Zámená dám. Prebieha na šachovnici 8×8. Na začiatku sú v prvom rade dámy v bielych KMS tričkách a v ôsmom rade sú dámy v modrých kms tričkách. Následne sa dámy hýbu v ťahoch (ako šachové dámy), v každom ťahu sa pohne práve jedna dáma, farby tričiek hýbajúcich sa dám sa striedajú. Aký je minimálny počet ťahov, po ktorom budú v prvom rade všetky dámy s modrými a v ôsmom rade všetky dámy s bielymi KMS tričkami?

2.8 Konzervovaný Mokrý Spotrebič

kategória **beta**

Slavo našiel v potoku starý televízor zapadnutý prachom. Všimol si, že do prachu na obrazovke sa dobre kreslí, tak si ihneď začal kresliť.

Na stranách AB, AC trojuholníka ABC ($|AB| \neq |AC|$) ležia body D, E tak, že $|BD| = |CE|$. Druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE označme X. Druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABE a ACD označme Y. Dokážte, že $|\sphericalangle XAY| = 90°$.

2.9 Krutý Miro Sabotér

kategória **beta**

Tomáš a Tomáš si stavajú vežu z dominových kociek. Veža pozostáva z niekoľých poschodí a na každom poschodí sa nachádza niekoľko kociek. Na začiatku veža pozostáva z jedného poschodia obahujúceho jednu kocku. Hru začína Tomáš a následne sa s Tomášom striedajú v ťahoch. Hru vyhráva Tomáš, ktorý ako prvý postaví 42. poschodie. V jednom ťahu spraví Tomáš na ťahu práve jednu z nasledovných možností:

1. Vyberie si poschodie, na ktorom je aspoň jedna kocka, a počet kociek na tomto poschodí strojnásobí.
2. Vyberie si poschodie, na ktorom je aspoň jedna kocka, a pridá tam 5 kociek.
3. Pokiaľ je na najvrchnejšom poschodí počet kociek deliteľný 17, môže vytvoriť nové poschodie, na ktoré uloží jednu sedemnástinu kociek z poschodia pred ním.

Keď už ich veža mala 17 poschodí, prišiel Miro, vežu im zbúral a zadal im nasledovnú úlohu: Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre ľubovoľné dve reálne čísla x, y platí

$$f(x+y)f(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3.$$

2.10 Kam Miro Smeruje?

kategória **beta**

Miro sa stratil v Bermundskom ostrouhlom trojuholníku GPS. Rozhodol sa použiť GPS, no tá v trojuholníku GPS funguje netriviálne. O svojej polohe sa dozvedel nasledovné: Bod M je stred strany GP a I je päta výšky na stranu GP. Predpokladajme, že R a O sú body v opačnej polrovine danej priamkou GP než bod S také, že $GR \perp SR$, $PO \perp SO$ a $|\sphericalangle PSO| = |\sphericalangle GSR|$. Dokážte, že Miro sa točí do kolečka, t. j. že $MIRO$ je tetivový štvoruholník.