Korešpondenčný matematický seminár
XL. ročník, 2018/2019
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 3. kola letnej časti

Termín odoslania 29. 4. 2019 (pre zahraničie 26. 4. 2019)

3.1 Kmeň Majestátnych Saván ($\kappa \leq 1$) kategória **alfa**

Náčelník afrického Kmeňa Majestátnych Saván zorganizoval pre svojich domorodcov turnaj. Za každé kolo turnaja, ktorého sa domorodec zúčastní, získa 17 bodov. Za každé kolo, ktoré vyhrá, získa ešte ďalšie 3 body. Na konci turnaja mal domorodec Ka-Em-Es presne o jeden bod viac ako domorodec Em-Ka-Es. Aký je najmenší počet kôl, ktorých sa mohol domorodec Ka-Em-Es zúčastniť?

3.2 Konzumácia Matematiky Sýti ($\kappa \leq 2$) kategória **alfa**

Kmeň Majestátnych Saván si veľmi ctí prírodu. Preto jeho členovia nehľadajú potravu v prírode, ale v matematike. V jeden deň dal náčelník svojmu ľudu nasledovné inštrukcie.

Nájdite všetky trojice (x, y, z) celých čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc

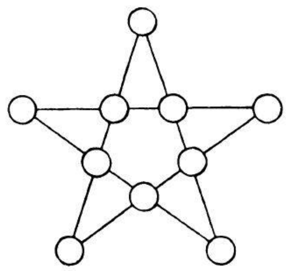
$$x - yz = 1,$$

$$xz + y = 2.$$

3.3 Kmeňový Magický Symbol ($\kappa \leq 3$) kategória **alfa** a **beta**

Kmeň Majestátnych saván má na svojom rituálnom oltári nakreslenú magickú hviezdu. Vždy pri ich rituáli do jej políčok vpisuje šaman čísla podľa posvätných podmienok.

Do každého políčka hviezdy treba vpísať jedno kladné celé číslo. Každé dve susedné políčka (tie, ktoré sú spojené čiarou) musia obsahovať čísla, ktoré majú najväčšieho spoločného deliteľa väčšieho ako 1. Každé dve nesusedné políčka musia obsahovať čísla, ktoré majú najväčšieho spoločného deliteľa 1. Koľko najmenej rôznych čísel možno použiť na vyplnenie hviezdy?



3.4 Kvetinky Musím Spojiť ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Keď sa bádateľka Jane predierala Africkými džungľami, veľmi ju zaujal obdĺžnikový kvetinový záhon. Niektorí ľudia v ňom hľadajú štvorlístky, no Jane v ňom chce nájsť obdĺžnik s celočíselnými rozmermi.

Každý bod obdĺžnika R (vrátane vnútorných bodov) so stranami 4 a 40 je zafarbený práve jednou zo štyroch farieb. Ukážte, že v obdĺžniku R existujú štyri body rovnakej farby, ktoré tvoria obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami strán.

3.5 Kúsok Môjho Srdca ($\kappa \leq 8$)

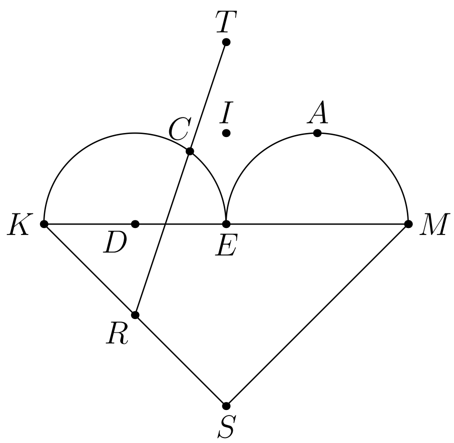
kategórie **alfa** a **beta**

Keď sa Jane dokochala kvetinovým záhonom, tak našla ešte niečo lepšie – Tarzana. Ten jej vravel: „Jane, darujem Ti kúsok môjho srdca."

Kúsok Môjho Srdca je tvorený rovnoramenným trojuholníkom KMS s pravým uhlom pri vrchole S. Bod E je stred strany KM. Polkružnice v opačnej polrovine ku KMS nad priemermi KE a EM označme postupne k, m. Vyznačme si v Kúsku Môjho Srdca nasledujúce body:

- Bod T je obraz bodu S v stredovej súmernosti so stredom v bode E.
- Bod R je stred strany KS.
- Bod D je stred úsečky KE.
- Bod C je priesečník priamky RT a polkružnice k.
- Bod I je stred úsečky ET.
- Bod A leží v polovici polkružnice l.

Dokážte, že sedemuholníku $SRDCIAM$ možno opísať kružnicu.



3.6 Kocky Milované Snúbencami

kategórie **alfa** a **beta**

Jane a Tarzan sa už nevedia dočkať ich svadby, preto si krátia čas tým, že si hádžu (spravodlivou) mincou a hrajú hru. Jane vyhrá, ak hodí hlavu viackrát ako Tarzan. Tarzan je džentlmen, takže ju nechá hádzať 2019-krát, zatiaľ čo on sám bude hádzať iba 2018-krát. Aká je pravdepodobnosť, že Jane vyhrá?

3.7 Kubko Mapuje Stopy

kategórie **alfa** a **beta**

Bádateľ Kubko sa dopočul, že v Afrike sa nachádza veľmi vzácny drahokam. Stopy po jeho polohe sú zašifrované do čísel p a k. Z nich má na základe tajnej formuly zistiť jeho polohu. Bojí sa však, že mu vyjde viacero miest. Upokojteho tým, že miesto je najviac jedno.

Nech p a k sú kladné celé čísla také, že p je prvočíslo a $k > 1$. Dokážte, že existuje najviac jedna dvojica (x, y) kladných celých čísel, pre ktorú platí $x^k + px = y^k$.

3.8 Kubka Morí Strašidlo

kategória **beta**

Kubko zistil, že drahokam sa nachádza v jaskyni uprostred africkej džungle, kde ho stráži strašidelná príšera. Kubko sa teda vybral na dobrodružnú výpravu do Afriky. Keď tam prišiel, príšera mu zadala nasledovnú úlohu.

Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Kružnica k_1 sa dotýka úsečky AB a polpriamok AD, BC a kružnica k_2 sa dotýka úsečky CD a polpriamok CB a DA. Označme P bod dotkyu kružnice k_1 s úsečkou AB a Q bod dotyku kružnice k_2 s úsečkou CD. Dokážte, že priamky AC, BD, PQ prechádzajú jedným bodom.

3.9 Kódy Musím Stláčať

kategória **beta**

Potom, čo Kubko úspešne zdolal príšeru, ostáva mu len jediné. Musí zadať do trezora s drahokamom správny kód – postupnosť čísel. Aby sa trezor odomkol, musia medzi zadávanými číslami platiť správne nerovnosti.

Majme ľubovoľnú postupnosť kladných reálnych čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Dokážte, že nerovnosť

$$1 + a_n > a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

platí pre nekonečne veľa kladných celých čísel n.

3.10 Krajiny Moje Svadobno-cestové

kategória **beta**

Veronika a Cd sa chystajú na svadobnú cestu do Afriky. Veronika si vyberá z krajín $K_3, K_4, K_5, \ldots$. Pre celé číslo $n \geq 3$, sa v krajine K_n nachádza $2n$ miest $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$. Nasledovné dvojice miest (a žiadne iné) sú spojené priamou obojsmernou leteckou linkou:

- mesto A_i s mestom B_i pre každé celé i ($1 \leq i \leq n$);
- mesto A_i je spojené s mestom A_j práve vtedy, keď $n \mid i - j + 1$ alebo $n \mid i - j - 1$;
- mesto B_i je spojené s mestom B_j práve vtedy, keď $n \mid i - j + 2$ alebo $n \mid i - j - 2$.

Veronika chce ísť len do krajiny, kde je možné spraviť okružnú cestu, na ktorej navštívi každé mesto práve raz (a vráti sa do mesta, kde začala). Medzi mestami sa možno presúvať len leteckými linkami. Nájdite všetky celé čísla $n \geq 3$ také, že Veronika chce ísť do krajiny K_n.

Príklad. Pre $n = 5$ sú letecké linky práve medzi týmito dvojicami miest:

- $\{A_1, B_1\}, \{A_2, B_2\}, \{A_3, B_3\}, \{A_4, B_4\}, \{A_5, B_5\}$;
- $\{A_1, A_2\}, \{A_2, A_3\}, \{A_3, A_4\}, \{A_4, A_5\}, \{A_5, A_1\}$;
- $\{B_1, B_3\}, \{B_2, B_4\}, \{B_3, B_5\}, \{B_4, B_1\}, \{B_5, B_2\}$.