



Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 30. 9. 2019 (pre zahraničie 27. 9. 2019)

1.1 Koláčik Mojej Starkej ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Veronika našla na povale babičkin recept na famóznu angreštovo-broskyňovo-cviklovo-dyňovú tortu. V recepte tiež stojí, že ak sa pri pečení použije čarovný súčin ingrediencií, bude torta nielen chutná, ale aj rozdeliteľná medzi 12 ľudí. Veronike sa to však sprvu nezdalo.

Pre štyri celé čísla a, b, c, d nazvime *čarovný súčin* hodnotu výrazu $(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$. Pomôžte Veronike nájsť všetky štvorice celých čísel (a, b, c, d) také, že žiadne dve z nich nemajú rovnakú hodnotu a ich čarovný súčin sa dá vydeliť číslom 12 bezo zvyšku.

1.2 Ktorá Minca Spadla ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Na Veronikinu oslavu a chutný koláčik prišla tiež Bea, ktorá si so sebou priniesla aj vrecúško s 10 mincami. Deväť z nich je obyčajných, ale desiata je falošná – má na oboch stranách znak. Bea vybrala z vrecúška náhodnú mincu, hodila ju a padol na nej znak. Aká je pravdepodobnosť, že minca, ktorou hodila, bola falošná?

1.3 Krivky Mám Súbežné ($\kappa \leq 3$)

kategória **alfa a beta**

Na svojom tanieri našiel Jožo nakreslený štvoruholník $ABCD$, ktorý mal strany AB a CD rovnobežné. Na uhlopriečke AC bol v strede vyznačený bod S . Jožo si všimol, že trojuholníky ABS a ACD majú rovnaký obsah a hneď vyhlásil, že priamka DS je preto rovnobežná s priamkou BC . Mal Jožo pravdu? Ak áno, ako na to prišiel? Ak nie, prečo?

1.4 Kilá Musia Sedieť ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa a beta**

Diana neverila Jožovi, že sú obsahy trojuholníkov ABS a ACD na jeho tanieri zhodné a tak sa ich rozhodla odvážiť. Pri tomto úkone sa jej akurát tak podarilo úspešne rozbiť Veronike váhu. Veronike tak neostáva nič iné, iba si objednať novú sadu¹ závaží.

Hmotnosť každého závažia môže byť ľubovoľné kladné reálne číslo. Veronika chce, aby sa jej závažia dali rozdeliť na 5 kôpok, z ktorých každá váži rovnako veľa. Podobne chce aj to, aby sa závažia dali takto rozdeliť na 9 rovnako vážiacich kôpok. Najmenej koľko závaží musí Veronika objednať? Aké hmotnosti majú mať?

1.5 Každý Miluje Sladkosti ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa a beta**

Zatiaľ, čo ostatní vedúci riešili problémy s váhou, Ondrej, Dominik a Tomáš sa rozhodli rozdeliť si n rovnakých cukríkov, ktoré nevinne ležali na stole. Chcú si ich rozdeliť tak, aby každý z nich dostal párny² počet cukríkov, alebo aby každý z nich dostal nepárny počet cukríkov. V závislosti od hodnoty kladného celého čísla n určte počet spôsobov³, ktorými si môžu chlapci cukríky rozdeliť.

¹Za sadu považujeme ľubovoľný kladný počet závaží ľubovoľnej hmotnosti.

²Nula je párne číslo.

³Dva spôsoby považujeme za navzájom rôzne, ak aspoň jeden z chlapcov má v každom z nich iný počet cukríkov.

1.6 Krátenie Mocniny Sedemnástky

kategórie **alfa** a **beta**

Jerry s Pedrom sa zase chceli zahrať počas oslavy videohru. Na to však najprv museli rozdeliť 17 farebných káblov do správnych portov. Tak sa v tom zamotali až musel prísť Vodka, ktorý im prisľúbil, že im pomôže, ak vyriešia nasledovnú úlohu:

Koľko existuje prirodzených čísel n , pre ktoré je číslo $17^{2019} \cdot n$ deliteľné číslom $17 + 2n$?

1.7 Kradnutie Mincí Strieborných

kategórie **alfa** a **beta**

Vo videohre sa zlodejka Robber-ta vlámala do banky. Našla tam 120 vriec, v každom je po 100 rovnakých mincí. Avšak len jedno vreco je plné strieborných mincí. Mince v ostatných vreciach sú bezcenné, ale sú na nerozoznanie od strieborných. Vie, že strieborná minca váži 9 gramov a bezcenná váži 10 gramov. Robber-ta je ale na lúpež pripravená – kúpila si v Kanianke vreckovú váhu. Lenže, ako možno od kanianskej váhy očakávať, jej nosnosť je len 1000 gramov. V jednom kroku môže Robber-ta položiť na váhu ľubovoľné množstvo mincí (nie nutne z rôznych vriec) a váha ukáže ich celkovú hmotnosť. Ak však Robber-ta položí na váhu väčšiu hmotnosť ako 1000 gramov, váha sa pokazí, nič neukáže, exploduje a Robber-ta prehrá. Nájdite najmenší počet krokov, ktorý Robber-ta zaručene potrebuje na to, aby zistila, ktoré vreco obsahuje strieborné mince.

1.8 Kolmicu Musím Spraviť

kategória **beta**

Vodka sa na oslave začínal nudiť, lebo Robber-ta už nebola s ním, ale vo videohre. A tak sa kamarát Jožo rozhodol, že ho zabaví svojou novou geometriou.

Je daný trojuholník ABC , v ktorom platí $|AC| = 2|AB|$. Označme O stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Os uhla BAC pretína stranu BC v bode D . Nech E je kolmý priemet O na AD . Ďalej nech F je bod na priamke AD rôznyi od D , pre ktorý platí $|CD| = |CF|$. Dokážte, že uhly EBF a ECF majú rovnakú veľkosť.

Vodka sa na úlohu pozrel, ihneď ju vyriešil a nudil sa ďalej...

1.9 Kuchtenie Múčnika Starkinho

kategória **beta**

Po oslave sa Veronika vybrala do pivnice, kde našla ďalší babičkin recept. Tiež využíval rovnaké ingrediencie ako ten prvý, ale tentokrát ich miešal do čarovného štvorpomeru. Babička v recepte tvrdí, že z tohto koláča sa vždy naje aspoň 0 ľudí. Podme to dokázať.

Dokážte, že pre každú štvoricu kladných reálnych čísel a, b, c, d platí:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

1.10 Knižka Moja Stratená

kategória **beta**

Veronika v pivnici tiež našla starú ošúchanú knižku. Mimo iného v nej bola legenda o bájnóm uhorskom kráľovstve a táto úloha:

Dané sú prvočísla p a q také, že $q = 2p + 1$. Dokážte, že existuje prirodzené číslo deliteľné q také, že jeho ciferný súčet v desiatkovej sústave je najviac 3.