Korešpondenčný matematický seminár
XLI. ročník, 2019/2020
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 2. kola zimnej časti

Termín odoslania 28. 10. 2019 (pre zahraničie 25. 10. 2019)

2.1 Kráľovná Milujúca Sedlákov ($\kappa \leq 1$) kategória **alfa**

Kde bolo, tam bolo, bolo raz jedno Uhorské kráľovstvo. V tomto kráľovstve vládla kráľovná Kika. Kika však nebola iba taká hocijaká kráľovná, ale kráľovná Miest Spálených so zlatým trojuholníkom na čele.

Majme rovnoramenný trojuholník ABC, v ktorom $|AB| = |AC|$. Bodom A veďme priamku p rovnobežnú so stranou BC. Kružnica so stredom v bode A, ktorá prechádza bodom C pretína priamku p v bode D takom, že uhol CAD je ostrý[1]. Dokážte, že bod D leží na osi uhla ABC.

2.2 Kubko, Medzinárodný Šašo ($\kappa \leq 2$) kategória **alfa**

Po tom, ako sa princ Ákos vrátil z vojny, zistil, že už nemal čo robiť so životom. Aby sa nenudil, dal si zavolať Jakuba, najslávnejšieho dvorného klauna široko-ďaleko. Avšak Jakub už mal tú česť sa s Ákosom spoznať a veľmi dobre si pamätal, že pán uhorský princ je nielen krvilačný, ale aj veľmi náladový. A tak sa stalo, že klaun dnes pre istotu princovi predvádzal iba svoje slávne čísla.

Hovoríme, že prirodzené n-ciferné číslo také, že $3 \leq n \leq 9$, je *slávne*, ak spĺňa tieto dve podmienky:

- číslo obsahuje každú cifru od 1 po n práve raz;
- pre každú cifru okrem prvých dvoch platí, že dvojnásobok danej cifry je väčší alebo rovný ako súčet dvoch predošlých cifier.

a) Ukážte, že žiadne štvorciferné číslo, ktoré je slávne, nemá cifru 4 ako druhú v poradí.

b) Zistite, na ktorých pozíciách sa môže nachádzať cifra 7 v sedemcifernom slávnom čísle.

2.3 Katapult Monštruóznej Sily ($\kappa \leq 3$) kategória **alfa**

Zakiaľ, čo sa uhorský princ Ákos zabával Jakubovými slávnymi číslami, potajme vyvíjal jeho úhlavný nepriateľ Kazisvet Matúš Strašný všemohúci trebuchet. Takýto katapult by navždy rozmetal kráľovské mestské steny a vyhnal Kiku z Uhorského kráľovstva. Problém však nastal, keď sa zistilo, že takýto mocný katapult možno postaviť iba na špeciálnej n-uholníkovej podstave.

Nájdite všetky celé čísla $n \geq 3$, pre ktoré existuje n-uholník, ktorý:

- má celočíselné dĺžky strán;
- každé jeho dve susedné strany sú na seba kolmé;
- nedá sa celý pokryť neprekrývajúcimi sa dlaždicami rozmeru 1×2, ktorých strany sú rovnobežné so stranami n-uholníka (otáčať ich možno).

[1] Teda ak existujú dva možné body D, vezmime ten s ostrým uhlom.

2.4 Koník Modrý Statný ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Štyria rytieri – Liu, Zhen, Ning a David – sa vybrali na uhorský rytiersky turnaj. Žiaľ, vybrali sa tam príliš neskoro a v ich meste ostalo už len 8 koní – čierny, modrý, sivý, biely, hnedý, béžový, brontofúzikový a kapurkový.

Koľko je rôznych kombinácií, ako sa mohli do mesta vybrať, ak na jednom koni mohli ísť najviac dvaja rytieri a na čiernom aj modrom koníkovi musel ísť do mesta aspoň jeden rytier? Dve kombinácie považujeme za navzájom rôzne, ak aspoň jeden z rytierov prišiel na koni inej farby.

2.5 Kováč Mariánosza Spotvoril ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Knieža Mariánosz v deň rytierskeho turnaja po prvý raz v živote zočil kráľovninu nebeskú krásu zosobnenú v jej prenádhernom zlatom trojuholníku a hneď po turnaji sa rozhodol, že musí mať rovnaký. Veď musí byť najkrajší v okolí. Žiaľ, u kováča si neprečítal všeobecné obchodné podmienky a keď prišiel domov, zistil, že na čele nemá zlatý, ale bronzový trojuholník ABC.

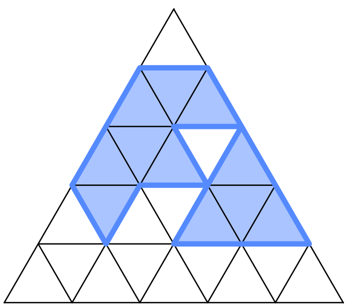
Na strane AB trojuholníka ABC sú dané body D a E tak, že platí $|AD| = |DE| = |EB|$ a body A, D, E, B ležia na priamke v tomto poradí. Rovnobežka so stranou AC, ktorá prechádza bodom D pretína stranu BC v bode F. Ďalej nech M je stred strany BC. Priamka EM pretína priamku AC v bode P. Dokážte, že priamka AF prechádza stredom úsečky BP.

2.6 Kráľovských Múrov Skolióza

kategórie **alfa** a **beta**

Templár Slavomír, vracajúci sa zo zemí saracénskych domov, si nemohol nevšimnúť krivosť mestských stien. Ako povinnosť káže, ihneď o tom upovedomil svoju kráľovnú Kiku. Tú to tak vyviedlo z miery, až prikázala svojmu najlepšiemu architektovi Mirovi, aby hradby zdemoloval (v tom je on expert) a nahradil ich najnovším typom trojcípich hradieb stojacich na špeciálnej trojuholníkovej sieti.

Rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky n je rozdelený na n^2 rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1. Miro si vyberie niekoľko z týchto trojuholníkov tak, aby sa po stranách vybraných trojuholníkov dalo prejsť medzi ľubovoľnými dvoma z nich. Následne postaví hradby na úsečkách medzi vybranými a nevybranými trojuholníkmi a tiež medzi vybranými trojuholníkmi a obvodom veľkého trojuholníka. Koľko rôznych počtov trojuholníkov si môže vybrať, ak celková dĺžka hradieb musí byť presne $3n$? Na obrázku môžete vidieť príklad možného výberu trojuholníkov, ktorý vyhovuje podmienkam.



2.7 Kombat Moháčskych Soldierov

kategórie **alfa** a **beta**

Obdobie šaškovania a turnajov sa skončilo! Turci na čele s novým sultánom Kebabom Muhammadom Sulejmanom tiahli do vojny proti nášmu Uhorskému kráľovstvu. Urýchlene boli vydané rozkazy, aby Ákosovi podriadení začali namiesto zapatrošenej čabajky hľadať všetkých bojaschopných mužov. Nájdite ich! A rýchlo! Nech sa môžeme čo najskôr vrátiť k hľadaniu klobásky maďarskej stratenej.

Nájdite všetky trojice reálnych čísel (a, b, c), pre ktoré platí:

$$a - b + \frac{1}{c} = 1526,$$

$$b - c + \frac{1}{a} = 1526,$$

$$c - a + \frac{1}{b} = 1526.$$

2.8 Kvantá Miest Spálených

kategória **beta**

Ákosova neprítomnosť neostala nepovšimnutá. Matúš ju hneď využil na to, aby vtrhol do kráľovstva a rad za radom plienil uhorské mestá. Bez princovej armády ho už nemal kto zastaviť, a tak kráľovnej Kike ostávala len posledná možnosť – rýchlo vyslať poslov do ohrozených miest, aby evakuovali lokálne obyvateľstvo. Najprv však bolo treba rad ohrozených miest nájsť.

Nájdite všetky kladné celé čísla d, pre ktoré existuje celé číslo $k \geq 3$ také, že čísla $1d, 2d, \ldots, kd$ možno usporiadať do radu tak, že súčet každých dvoch susedných čísel je druhou mocninou celého čísla (nie nutne toho istého).

2.9 Kompletne Márna Situácia

kategória **beta**

Vzhľadom na to, že Ákosa s vojskami stále nebolo a Matúšova armáda sa nezadržateľne blížila k Vyšehradu, rozhodla sa kráľovná Kika povolať svojich troch najspoľahlivejších pomocníkov – Kubka, Marianosza a Slava. Tí dostali za úlohu preskúmať blížiacu sa hrozbu z nového uhla a nájsť rozumné východisko z tejto šlamastiky. Žiaľ, nech sa na problém pozerali ako len chceli, výsledok bol vždy rovnaký...

V trojuholníku ABC, v ktorom platí $|AB| < |AC|$, označme D priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole A a strany BC. Nech P je priesečník osi vonkajšieho uhla pri vrchole A a kružnice opísanej trojuholníku ABC rôzny od A. Uvažujme kružnicu k, ktorá prechádza bodmi A a P. Predpokladajme, že k pretína úsečku BP v jej vnútornom bode E a úsečku CP v jej vnútornom bode F. Dokážte, že uhly DEP a DFP majú rovnakú veľkosť.

2.10 Konštrukčný Mirov Seminár

kategória **beta**

Nakoniec sa trio KMS rozhodlo povolať architekta Mira. Miro ako správny znalec miestnych pomerov hneď vedel, že jediným možným riešením v danej situácii bude konštrukcia všetkých možných obranných funkcií na našich kráľovských mestských stenách. Taktiež tušil, že lokálne obyvateľstvo si pri tom vytrpí svoje...

Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ také, že

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{N}$ také, že $10^6 - 10^{-6} < x/y < 10^6 + 10^{-6}$.