Korešpondenčný matematický seminár
XLI. ročník, 2019/2020

KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 3. kola zimnej časti

Termín odoslania 25. 11. 2019 (pre zahraničie 22. 11. 2019)

3.1 Krajina Matematických Špásov ($\varkappa \leq 1$) kategória **alfa**

Uprostred stola stála krištáľová guľa. Z jedného konca na ňu hľadel jasnozrivý králik a z druhej zúfalý Kebab. Teraz už vedel, že naháňať pred bitkou králika a skočiť za ním do nory bola osudová chyba. Skončí rovnako ako Aňa, navždy stratený v Krajine matematických špásov a nikdy odtiaľto neujde. A mal pravdu, pretože všetvidiaca guľa už hľadala náhodné číslo, zatiaľ čo králik mu položil prvú hádanku.

Nech vševidiaca guľa ukáže náhodné celé číslo x medzi 1 a 10^{12}(vrátane). Aká je pravdepodobnosť, že posledné dvojčíslie čísla x^3 bude 11?

3.2 Králik Mätie Sultána ($\varkappa \leq 2$) kategória **alfa**

Sultánovi sa už z úloh zatmieval mozog, niekde pri dvadsiatej hádanke ich už aj prestal počítať. Nevládal. Bol porazený. Vedel, že sa už nikdy odtiaľto nedostane a bez jeho velenia turecké vojská isto prehrajú bitku pri Moháči. A králik? Ten sa bavil. S potmehúdskym úškrnom vyčaroval na stôl balíček matgických kariet a povedal:

„Tu máš balík 52 matgických kariet, ktoré som ti práve náhodne pootáčal tvárou nahor alebo tvárou nadol[1]. V jednom kroku smieš rozdeliť tento balík, jednu časť otočiť naopak a umiestniť ju späť na druhú časť. Moja otázka znie: ‚Vieš otočiť všetky karty lícom nahor bez ohľadu na to, ako som ich otočil?‘ “

3.3 Komorná Múdro Slúži ($\varkappa \leq 3$) kategória **alfa**

Vďaka Konštrukčnému Mirovmu Semináru mesto ustálo všetky útoky Kazisveta Matúša Strašného a jeho Katapultu Monštruóznej Sily. O chvíľu obom stranám došlo, že priamym útokom nikto túto vojnu nevyhrá a tak Matúš zahájil blokádu mesta. Aby sa kráľovná Kika vyhla hladomoru, povolala svoju najmúdrejšiu komornú Magdu a dala jej za úlohu nájsť všetky zásoby jedla. Zásoby sú však poschovávané po celom meste podľa veľmi sofistikovaného vzorca tak, aby ich Ákos nenašiel a nezjedol ich. Magda vďaka svojmu umu hravo našla všetky zásoby jedla v meste. Nájdete ich aj vy?

Nájdite všetky trojice kladných celých čísel (a, b, n), pre ktoré platí:

$$a! + b! = 2^n$$

[1] Karty pritom naďalej ostali v balíku.

3.4 Korytnačka Maďarských Šermiarov ($\kappa \leq 5$) kategórie **alfa** a **beta**

Zatiaľ, čo Turci pri Moháči márne hľadali svojho sultána, uhorskí generáli domýšľali novú vojenskú taktiku, ktorou by získali prevahu nad nepriateľom. Šlo o štvorcovú formáciu s krycím názvom „Korytnačka“, v ktorej by podľa istých pravidiel spolu bojovalo niekoľko šermiarov s bielymi a čiernymi štítmi ako jeden celok. Žiaden generál však nevedel predpovedať, či táto formácia môže byť dostatočne veľká na to, aby porazila Turkov. A to i napriek tomu, že sa im podarilo daný problém zúžiť na nasledovnú úlohu:

Majme štvorcovú tabuľku zloženú z $n \times n$ menších štvorčekov. Každý štvorček je zafarbený buď nabielo, alebo načierno. Pre každú dvojicu stĺpcov a každú dvojicu riadkov platí, že štyri štvorčeky ich prieniku nesmú byť jednej farby. Aké najväčšie môže byť n?

3.5 Kráľovičova Manifestácia Stožiarom ($\kappa \leq 8$) kategórie **alfa** a **beta**

Po vojne je každý generálom. O to horšie, keď nemáte generála ani pred bitkou. To bol nakoniec i dôvod neslávneho konca tureckej armády, ktorá nedokázala odolávať nájazdom uhorských koníkov. Na počesť tohto veľkolepého víťazstva sa Uhori rozhodli na bojisku vztýčiť víťazný stĺp, ktorý by bol symbolom tohto veľkolepého víťazstva pre mnohé generácie. Ukázalo sa však, že vztýčiť víťazný stĺp len tak uprostred bojiska je omnoho ťažšie, ako sa predpokladalo a na jeho vztýčenie bude potrebných kopec obskúrnych prerekvizít. Veď usúďte sami:

Nech $ABCD$ je lichobežník, kde $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$ a $|BC| = |CD| = |DA|$. Body E a F delia stranu AB na tri rovnako dlhé časti s tým, že bod E je medzi bodmi A a F. Priamky CF a DE sa pretínajú v bode P. Dokážte, že $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle DAB|$.

3.6 Kompulzorná Mestská Súťaž kategórie **alfa** a **beta**

Vzhľadom na nudný charakter obliehania nebolo prekvapením, že sedláci v meste sa začali nudiť. Aby sa predišlo zbytočným problémom s obyvateľstvom vydala kráľovná v mene latinského úslovia panem et circenses nový kráľovský dekrét, ktorý prikazoval sedlákom hrať sa vo dvojiciach nasledovnú hru. A tak sa sedláci začali povinne hrať nasledovnú hru:

Sedlák 1 nakreslí na mapu 2019 miest a n ciest, pričom každá cesta spája dve rôzne mestá a každé dve mestá sú spojené najviac jednou cestou. Potom hrá so sedlákom 2 hru, v ktorej na striedačku mažú mestá z mapy spolu s cestami, ktoré z nich vychádzajú. Prvé mesto maže sedlák 1. Hra končí, keď ostanú na mape len dve mestá. Pokiaľ sú spojené cestou, vyhrá sedlák 2, inak vyhrá sedlák 1. Nájdite najmenšie celé číslo n, pre ktoré má sedlák 2 víťaznú stratégiu.

3.7 Kruhy Medzinárodnej Šarvátky kategórie **alfa** a **beta**

Mesto odolalo obliehaniu. Matúš pokušeniu vyhodiť svojich neschopných generálov zo skupiny. A Ákos nutkaniu zastaviť sa cestou z bojiska v najbližšom mäsiarstve po klobásku. Tak sa stalo, že všetko toto sa stretlo na jednej kope a všetci žili v obliehaní, síce nie šťastní, ale aspoň dokým nepomreli. Mesto obkľúčili Mirove hradby, ktoré obkľúčil Matúš, ktorého obkľúčila Ákosova armáda. A pletky s kružnicami sa mohli začať.

Dané sú kružnice k_1 a k_2, ktoré majú stredy O_1 a O_2 a ktoré sa pretínajú v bodoch A a B. Priamka O_1A pretína k_2 v bodoch A a C a priamka O_2A pretína k_1 v bodoch A a D, pričom A je vnútorným bodom úsečiek O_1C aj O_2D. Priamka rovnobežná s priamkou AD, ktorá prechádza cez bod B pretína k_1 v bodoch B a E. Predpokladajme, že priamky AC a DE sú navzájom rovnobežné. Dokážte, že priamka CD je kolmá na priamku CO_2.

3.8 Končíme s Márnou Situáciou

kategória **beta**

Viacnásobné obliehania nevyhovovali nikomu. Bolo preto prirodzené, že kráľovná potrebovala nájsť rozumné riešenie tejto situácie. A tak sa stalo, že poverila svojich troch najlepších pomocníkov Kubka, Mariánosza a Slava, aby jej našli všetky možné riešenia. Potom by si už sama vedela poľahky vybrať to najlepšie z nich.

Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že rovnica

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

má práve 2019 riešení tvaru (x, y), kde x a y sú prirodzené čísla také, že $x \geq y$.

3.9 Kamoši Mysľou Sprznení

kategória **beta**

Nakoniec sa v kráľovstve rozhodli pre mierumilovné riešenie a vyslali Kubka aj s jeho úžasnými trikmi za Matúšom, aby mu roztopil srdiečko a našiel dobro v jeho duši. Keby mal Matúš nejakých kamarátov, tak by nemal potrebu si nič dokazovať a z vlastných rozmarov plieniť polku uhorského kráľovstva. Nakoniec sa Kubko zjavil v Matúšovom stane a začal s čelným útokom na možného nového priateľa.

Kubko si napíše na čelo n reálnych čísel vrátane nuly. Potom sa s nimi hrá. V jednom kroku si zoberie nenulový mnohočlen, ktorý má za koeficienty čísla, ktoré sú napísané na čele[2], a pripíše si na čelo všetky jeho korene. Koľko najmenej čísel si musí Kubko napísať na čelo, aby po konečnom počte krokov vedel na čele dostať čísla $-2019, -2018, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 2018, 2019$?[3]

3.10 Kubkova Maškaráda Šťastia

kategória **beta**

Nutno uznať, že po prvom kole bol Matúš očarený Kubkovým šarmom a genialitou jeho kúzelníckych trikov. Ostávalo naozaj už len trošku, aby si Matúš uvedomil svoj veľký omyl a stiahol sa i so svojou armádou preč z Uhorska. Kubko vedel, čo bolo v stávke, no i tak sa rozhodol staviť všetko na jednu kartu - svoj ultimátny trik s kartami, ktorý ak vyjde, tak roztopí srdiečko každému, aj tomu najstrašnejšiemu kazisvetovi na svete.

Definícia. Keď máme v rade usporiadané karty $1, 2, \ldots, n$, tak dvojicu kariet (a, b) voláme *inverzia*, pokiaľ $a > b$ a karta s číslom a sa nachádza v rade skôr ako karta s číslom b. Napríklad, v rade kariet $3, 1, 4, 2$ máme 3 inverzie: $(3, 1)$, $(3, 2)$, a $(4, 2)$.

Kubko má n kariet očíslovaných číslami $1, 2, \ldots, n$, ktoré má v nejakom poradí usporiadané v rade. Postupne pre $i = 1, 2, \ldots, n$ urobí Kubko nasledovnú operáciu: Zoberie kartu s číslom i a keď naľavo od nej je k kariet, tak ju presunie v rade tak, aby napravo od nej bolo k kariet. Dokážte, že bez ohľadu na to, s akým poradím kariet Kubko začínal, bude mať jeho výsledné poradie kariet rovnaký počet inverzií ako počiatočné poradie kariet.

Príklad. Pokiaľ Kubko začína s poradím $3, 1, 4, 2$, tak preusporiadavanie bude vyzerať nasledovne:

$$3, 1, 4, 2 \rightarrow 3, 4, 1, 2 \rightarrow 2, 3, 4, 1 \rightarrow 2, 4, 3, 1 \rightarrow 2, 3, 4, 1.$$

[2] Každé z čísel na čele môže byť použité ľubovoľný počet krát, nemusia byť použité všetky.
[3] Okrem týchto čísel sa tam môžu nachádzať aj iné.