Korešpondenčný matematický seminár
XLI. ročník, 2019/2020
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 24. 2. 2020 (pre zahraničie 20. 2. 2020)

1.1 Kapusta Magalhãesovi Skvasila ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Moreplavec Fernão de Magalhães si pred plavbou na svoju loď naložil 100 sudov s čerstvou chrumkavou kapustou postupne s hmotnosťami $10, 20, 30, \ldots, 1000$ kilogramov. Bohužiaľ, kapusta mu v niekoľkých sudoch skvasila, čím prišla o svoju chrumkavosť. Jeho pobočník Enrique de Malacca mu však po tom, ako sa na lodi popýtal ostatných námorníkov, čo vedia o sudoch, oznámil: „Nezúfaj, síce neviem presne ktoré sudy skvasili. Ale stále viem zo všetkých sudov vybrať 19 sudov s čerstvou chrumkavou kapustou tak, že spolu budú vážiť aspoň 14 060 kilogramov. Dokonca bez ohľadu na to, ktoré sudy ti skvasili.“ Zistite, koľko najviac sudov mohlo Magalhãesovi skvasiť.

1.2 Karavely Majúce Smer ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Zo Seville vyplávali lode L, O a Ď. Plavili sa na západ v trojuholníkovej formácii. Zrazu si Magalhãesov pobočník Enrique de Malacca uvedomil, že sa neplavia v len tak hocijakej formácii, ale tvoria rovnostranný trojuholník. Magalhães mu to však nechcel uveriť...

Nech $LO\check{D}$ je trojuholník. Body P a Q sú na strane $O\check{D}$ a platí $|OP| = |PQ| = |Q\check{D}| = |O\check{D}|/3$. Na strane $\check{D}L$ sú body R a S a platí $|\check{D}R| = |RS| = |SL| = |\check{D}L|/3$. Body T a U sú na strane LO a platí $|LT| = |TU| = |UO| = |LO|/3$. Body P, Q, R, S, T a U sú na jednej kružnici. Pomôžte Enriquemu dokázať, že trojuholník $LO\check{D}$ je naozaj rovnostranný.

1.3 Kormidelníkova Mincová Senzácia ($\kappa \leq 3$)

kategória **alfa** a **beta**

Magalhães má troch hlavných kormidelníkov iniciálkami L O a Ď, ktorým potrebuje vyplatiť mzdu za ich rovnomernú plavbu. Každému chce zaplatiť podľa toho, ako zodpovedne si svoju prácu plnil.

Nájdite všetky usporiadané trojice kladných celých čísel (a, b, c), ktoré spĺňajú nasledovné podmienky:

- každé dve z čísel a, b, c sú nesúdeliteľné;
- číslo a delí $a + b + c$;
- číslo b delí $a + b + c$;
- číslo c delí $a + b + c$.

1.4 Kamarátov Magalhães Stratil ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Kormidelníkom sa nepáčilo, ako málo im Magalhães zaplatil, a tak sa rozhodli aj so svojimi vernými opustiť flotilu. Člny, ktoré chceli použiť na odchod, sú však len dvojmiestne.

Utiecť sa rozhodlo 16 námorníkov a každý z námorníkov má práve troch kamarátov, pričom kamarátstvo je vzťah vzájomný. Rozhodnite, či možno námorníkov rozdeliť do dvojíc tak, aby každý námorník bol vo dvojici so svojim kamarátom, bez ohľadu na to, ako sa námorníci kamarátia.

1.5 Komplikácia Malovaných Sukovíc ($\kappa \leq 8$) kategórie **alfa** a **beta**

Magalhãesovi sa po dlhej ceste začínali míňať zásoby jedla. Preto zakotvil svoje lode pri najbližšom ostrove. Útočište našiel u jedného domorodého kmeňa. Starejší by ich aj rád pohostil, ale momentálne bol zaneprázdnený skladaním jednofarebného trojuholníka prehrabávajúc sa hromadou trojfarebných paličiek. Kým trojuholník nezloží, tak žiadne jedlo nebude.

Starejší má 100 žltých, 100 červených a 100 zelených paličiek, pričom paličky považujeme za úsečky, ktorých dĺžky môžu byť, aj v rámci jednotlivej farby, rôzne. Vedia, že pokiaľ si vyberú tri paličky, po jednej z každej farby, je možné z týchto paličiek poskladať trojuholník. Dokážte, že existuje taká farba, že z ľubovoľných troch paličiek tejto farby možno poskladať trojuholník.

1.6 Kam Má Smerovať kategórie **alfa** a **beta**

S doplnenými zásobami sa hneď plaví lepšie. Niet preto divu, že Magalhães svižne oboplával Patagóniu, až sa dostal k zvláštnemu lichobežníkovému súostroviu. Pomôžte mu zistiť, pod akým uhlom sa má teraz vydať, aby bezpečne preplával medzi ostrovmi.

Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD, ktorého uhlopriečky sa pretínajú v bode P. Vieme, že platí $|BC| = |DP|$ a $|AB| = |CP|$. Navyše BD je osou uhla ABC. Vypočítajte veľkosť uhla DAB.

1.7 Krutá Mocná Smršť kategórie **alfa** a **beta**

Magalhãesa na mori zastihla silná búrka. Aby sa flotila zachránila, zavolal si pobočníka Enrique de Malacca, najmúdrejšieho zo všetkých námorníkov. Enrique sa zamyslel a rozhodol sa, že vypočíta súradnice miesta, na ktorom bezpečne prečkajú búrku.

Enrique si zavrel vo svojej kajute a na dvere kriedou napísal trojicu navzájom rôznych prirodzených čísel (a, b, c), pre ktorú platilo $a + b + c = 123\,456\,789$. Potom začal opakovať nasledovnú operáciu: Keď bola na dverách trojica čísel (x, y, z), tak na dvere napísal trojicu $(y+z-x, z+x-y, x+y-z)$ a trojicu (x, y, z) počas toho zmazal. Dokážte, že bez ohľadu na to, akú trojicu čísel si Enrique napísal na začiatku na dvere, sa po 26 krokoch bude na dverách nachádzať aspoň jedno záporné číslo.

1.8 Kávu Musím Spapať kategória **beta**

Po tom, čo Magalhães úspešne unikol smrti v búrke, zastavil sa so svojou flotilou na jednom tichomorskom ostrove. Námorníkov tam obzvlášť zaujali cibetky, ktoré sa živili rôznymi druhmi kávovníkov. Chlapi neskôr odpozorovali, že ostrovní domorodci jedia kávové zrná z jej trusu a rozhodli sa to sami vyskúšať. Na ich veľké prekvapenie mali tieto zrná rôznorodé chute podľa toho, z akého kávovníka práve cibetka jedla.

Cibetku si môžeme predstaviť ako takú funkciu $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, že pre všetky prirodzené čísla $n > 1$ existuje prvočíslo p také, že platí p delí n a

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

Navyše platí

$$f(13^{2019}) + f(17^{2020}) + f(19^{2021}) = 2018.$$

Vypočítajte hodnotu

$$f(2019^{13}) + f(2020^{17}) + f(2021^{19}).$$

1.9 Keď Milionárom Si

kategória **beta**

Po mnohých ďalších mesiacoch plavby sa Magalhãesova flotila konečne vrátila naspäť do rodného Portugalska. So sebou si námorníci priniesli aj nemalý poklad. Po zakotvení narazili v prístave na talianskeho vynálezcu menom Gianetta (čítaj Žaneta), ktorý ich zaujal svojim vynálezom. Pomocou neho mohli moreplavci investovať a zhodnocovať svoje prinesené zlaté mince, podobne ako na dnešnej burze. Bystrí chlapci si však všimli v Gianettovom vynáleze chybičku. Vyzerá to, že vďaka nej môžu pri správnom rozdelení mincí získať neúmerné bohatstvo.

Na začiatok moreplavci umiestnia na tri kôpky postupne a, b, c mincí, kde a, b, $c \geq 2017$ sú kladné celé čísla. Vynález umožňuje v jednom kroku vykonať jednu z nasledujúcich operácií:

(1) Moreplavci si vyberú kôpku, na ktorej je párny počet mincí. Vynález z nej zoberie všetky mince a po polovici z nich dá na zvyšné dve kôpky.

(2) Moreplavci si vyberú kôpku, na ktorej je nepárny počet mincí a zároveň aspoň 2019 mincí. Vynález z nej zoberie 2019 mincí a na zvyšné dve kôpky pridá po 1010 mincí.

Predpokladajme, že vo vynáleze je dostatok mincí navyše. Nájdite všetky usporiadané trojice (a, b, c), pre ktoré po nejakom konečnom počte ťahov moreplavci vedia dostať na niektorej kôpke aspoň 2019^{2020} mincí.

1.10 Kika Magalhãesa Stratila

kategória **beta**

V tejto úlohe, mal byť nejaký pekný historický príbeh. Žiaľ, Kika stratila svoju historickú knižku o Magalhãesovi, a tak nám neostáva nič iné, iba vám namiesto pekného čítania zadať túto šmakocinku:

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom platí $|AB| < |AC|$. Označme O stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Nech Q je bod taký, že OQ je priemerom kružnice k opísanej trojuholníku AOC. Na priamkach AQ a AC sú dané body M a N tak, že $AMBN$ je rovnobežník. Dokážte, že priesečník priamok MN a BQ leží na kružnici k.