Korešpondenčný matematický seminár
XLI. ročník, 2019/2020
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 2. kola letnej časti

Termín odoslania 23. 3. 2020 (pre zahraničie 19. 3. 2020)

2.1 Kasíno Mamutích Šamanov ($\kappa \leq 1$) kategória **alfa**

Hazard je jedna z najstarších voľnočasových aktivít, akej sa kedy ľudstvo venovalo. Historické pramene uvádzajú, že už počas ranej doby kamennej prevádzkovali kmeňoví šamani nasledovnú hru:

Šaman položí na stôl tri obrovské mamutie lebky. Každý hráč si musí nezávisle vybrať práve jednu z nich a hodiť do nej jeden mamutí chvost – vtedajšie platidlo, bolo ho dokonca možné deliť na zlomky. Následne šaman skontroluje, či sú všetky počty mamutích chvostov v lebkách rôzne. Ak je v niektorých lebkách rovnako chvostov, mamutie chvosty sa vrátia hráčom a hra sa začne odznova. Ak sú počty v každej lebke iné, zistí v ktorej lebke je najmenej mamutích chvostov. Hráči, ktorí vložili svoje mamutie chvosty do tejto lebky sú výhercovia hry a získajú od šamana dva mamutie chvosty, plus si rozdelia mamutie chvosty z lebky, v ktorej bolo najviac chvostov. Chvosty z najprázdnejšej aj strednej lebky si ponecháva šaman. Pomôžte šamanovi zistiť, pre aké počty hráčov sa mu oplatí hru prevádzkovať[1].

2.2 Kosťou Maľujem Škrabanice ($\kappa \leq 2$) kategória **alfa**

Prvou formou umenia, ktorú ľudstvo kedy vytvorilo, boli graffity. Ak neveríte, stačí sa zamyslieť, čo sa nám zachovalo po pravekých ľuďoch. Neboli to žiadne symfónie, olejomaľby ani básne. Boli to čarbanice na čerstvo zateplených stenách jaskyne. Najznámejšia z tých, ktoré sa zachovali do dnešných dní, zobrazuje vypätý moment z lovu mamutov. Vyzerá nasledovne:

Základom je ostrouhlý trojuholník ABC. Body D a E sú pätami výšok postupne na stranu BC a na stranu AC. Priesečník priamok AD a BE je označený ako H. Priamka cez bod H pretína úsečku BC v bode P a úsečku AC v bode Q. Bod K leží na úsečke BE tak, že priamka PK je kolmá na BE. Podobne, bod L leží na úsečke AD tak, že priamka QL je kolmá na AD. Dokážte, že priamky DK a EL sú rovnobežné.

2.3 Kameň Menom sa Stal ($\kappa \leq 3$) kategória **alfa** a **beta**

Zanedlho po tom, ako začali prvotní ľudia formovať kmene a iné spoločenstvá objavil sa problém, ktorý dovtedy nemuseli riešiť. Nemali mená a nevedeli, ako sa oslovovať, čo vytváralo medzi súkmeňovcami nemalé problémy. Napríklad keď počas lovu niekto zakričal: „*Hej ty tam, bacha, máš za chrbtom šabľozubého tigra!*“ a otočili sa všetci, aj tí, ktorí mali tigra pred sebou, tak to nebolo dvakrát príjemné...

Kmeňoví šamani teda prišli s nápadom dávať ľuďom mená. Vymysleli spolu vyše 40 rôznych mien, zoradili celý kmeň do radu[2] a súkmeňovci si začali zaradom dávať mená podľa nasledovných pravidiel:

- Každý človek, ktorý stojí v rade na nepárnej pozícii sa volá „Kameň“.
- Pre každé prirodzené číslo n platí, že každý človek, ktorý stojí v rade na pozícii n má rovnaké meno ako človek na pozícii $4n$.
- Pre každé prirodzené číslo n platí, že každý človek, ktorý stojí v rade na pozícii n má rovnaké meno ako aspoň jeden z ľudí na pozíciách $n + 2$ a $n + 4$.

Dokážte, že všetci sa volajú „Kameň“.

[1] Šamanovi sa oplatí hru prevádzkovať ak pri veľkom počte odohratých hier získa v priemere viacej mamutích chvostov, ako stratí.
[2] Pre potreby úlohy je ľudí v našom kmeni nekonečne veľa, rovnako ako prirodzených čísel.

2.4 Klaude Monet Staropraveku ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Tí, ktorí dávali na hodinách výchovy umením pozor, si iste pamätajú, že impresionizmus ako umelecký smer vznikol koncom 19. storočia. Pravda je však niekde úplne inde. Totižto slovo „impresionizmus" vychádza z francúzskeho impress – zapôsobiť. Lenže už ľudia z rodu homo neanderthalensis sa snažili zapôsobiť na svoje súkmeňovkyne. Napríklad táto jaskynná maľba z obdobia raného praveku je jasným dôkazom toho, že už istý Kameň sa umením pokúšal zapôsobiť na svoju milú, a teda bol prvým impresionistom. Veď posúďte sami:

Kameň nakreslil na stenu jaskyne pre svoju drahú štvorec $LOVE$ s hranou dĺžky l. Potom dokreslil bod A mimo štvorca tak, aby mu vznikol rovnostranný trojuholník AVE. Následne opísal trojuholníku ALO kružnicu k a jej stred nazval S. Aký je pomer dĺžky l ku dĺžke strany $|SL|$?

2.5 Kvôli Magickému Smilodonovi ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

V časoch temného praveku neexistovali žiadne súdy ani zákony. Jediné právo bolo právo najsilnejšieho. A tak tomu bolo aj jedného teplého večera zhruba 10 000 rokov pred naším letopočtom, kedy sa traja mocní a powerful bojovníci Kameň, Kameň a Kameň rozhodli stretnúť v súboji na život a na smrť o labu starejšinovej najstaršej... šabľozubej tigrice. Tá im mala podľa starodávnej povery priniesť astrálne schopnosti. Už-už sa šli mlátiť, keď z jaskyne vybehol starešina so slovami: „*Do mamutej nohy, chlapi, neblbnite! Vaše sily sú ekvivalentné, a teda pri súboji akurát všetci zomriete. Aha, pozrite, tu som vyčíslil vaše bojové schopnosti.*"

Povedzme, že silu týchto bojovníkov predstavujú reálne čísla a, b, c, z ktorých aspoň dve sú navzájom rôzne. Dokážte, že $a + b + c = 0$ je ekvivalentné[3] s $a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$.

2.6 Koniec Mamutieho Šamana

kategórie **alfa** a **beta**

Šamana už omrzelo zdierať kmeň svojou mamuťou hrou, a tak si vymyslel hru novú. Zobral z jaskyne dva kamene, ktoré vyzerali ako dve šachovnice s $m \times n$ políčkami. Na niektoré políčka šachovníc potom položil figúrku venuše (na každé políčko najviac jednu). A to tak, aby platilo, že v každom riadku oboch šachovníc je párny počet figúrok. Okrem toho ešte platí, že počet figúrok v i-tom stĺpci prvej šachovnice je rovnaký ako počet figúrok v i-tom stĺpci druhej šachovnice (pre všetky $1 \leq i \leq n$). Hráč hrajúci šamanovu novú hru môže **na prvej šachovnici** vykonávať nasledujúce dva typy ťahov:

(1) Vezme ľubovoľné 2 riadky a vymení ich obsah.

(2) Popresúva ľubovoľne figúrky v rámci prvých dvoch riadkov tak, aby platilo nasledovné:

- Každá figúrka ostane vo svojom stĺpci.
- Po ťahu bude na každom políčku najviac jedna figúrka.
- Po ťahu bude v prvom riadku párny počet figúrok.

Dokážte, že bez ohľadu na počiatočné rozmiestnenie venuší, môže hráč hrajúci túto novú šamanovu hru pomocou týchto ťahov docieliť to, aby figúrky na oboch šachovniciach boli usporiadané rovnako, a tým vyhrať túto hru.

[3] To znamená, že sústava rovníc $a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$ platí ak $a + b + c = 0$ a neplatí ak $a + b + c \neq 0$.

2.7 Kmeň Mäso Snoril

kategórie **alfa** a **beta**

Na jar, t. j. pred zimou lovil každý kmeň mamuty, pretože mamutie mäso je najlepšie mladé. Nájsť však všetky mladé mamuty je takmer nemožné, pretože sa správajú ešte priveľmi *racionálne*. Preto sa po rokoch pokusov a omylov rozhodli všetky kmene spojiť a založili mamutobijeckú ligu – skupinu krvilačných hľadačov, lovcov a zberačov, ktorých cieľom bolo nájsť, uloviť a pozbierať mäso zo všetkých mladých mamutov. Ich úloha bola jasne daná. Ostávalo ju už len vyriešiť:

Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo

$$\frac{4n-2}{n+5}$$

druhou mocninou nejakého racionálneho čísla.

2.8 Korisť Muži Sledovali

kategória **beta**

Ostávalo uloviť už len posledného mladého mamuta a činnosť mamutobijeckej ligy by bola korunovaná úspechom. Tento posledný sa však nesprával racionálne ako ostatné, ale bežal po kružnici. Aby ho lovci dobehli, rozhodli sa upustiť od svojich zásad a bežať po tetive. Bude to však stačiť? Podarí sa lovcom uloviť posledného mladého mamuta?

Daný je trojuholník ABC s kružnicou k jemu opísanou. Ďalej vnútri trojuholníka ABC leží bod P. Priamky AP, BP a CP pretínajú kružnicu k postupne v bodoch D, E a F, pričom bod D je rôzny od bodu A, bod E rôzny od bodu B a bod F rôzny od bodu C. Na úsečke DP zvoľme bod X. Predpokladajme, že rovnobežka s priamkou AB vedená cez bod X pretína úsečku PE v jej vnútornom bode Y. Podobne predpokladajme, že rovnobežka s priamkou AC vedená cez bod X pretína úsečku PF v jej vnútornom bode Z. Dokážte, že štvoruholník $EFZY$ je tetivový.

2.9 Korešpondenční Matematickí Seminaristi

kategória **beta**

Neandertálci boli veľmi šikovní a cieľavedomí ľudia. Veď inak by sa im nepodarilo nájsť všetky mladé mamuty. My, riešitelia korešpondečného matematického seminára, sa však nemienime nimi nechať len tak ľahko zahanbiť.

A preto nájdeme všetky celé kladné čísla m, n, pre ktoré platí

$$n! + m! = m^n.$$

2.10 Konvergujúca Mamutia Šmakocinka

kategória **beta**

Neandertálci mali mamutov. Potom však všetkých mamutov ulovili a zabili. Preto my už mamutov nemáme. Zamerajme sa preto radšej na niečo, čo máme. Máme postupnosti reálnych čísel $a_0, a_1, \ldots, a_{2020}$ a $b_1, b_2, \ldots, b_{2020}$, pre ktoré platí pre každé $n \in \{0, 1, \ldots, 2019\}$ buď

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \quad \text{a} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} - a_n,$$

alebo

$$a_{n+1} = 2a_n^2 \quad \text{a} \quad b_{n+1} = a_n.$$

Ak platí $a_{2020} \le a_0$, tak potom aká je najväčšia možná hodnota výrazu $b_1 + b_2 + \cdots + b_{2020}$?