Zadania 1. série zimnej časti KMS 2002/2003

Kategória ALFA

Úloha č. 1: V každom políčku tabuľky 5×5 je napísané jedno z čísel 1, 2, 3, 4 a 5 tak, že v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je každé z týchto čísel práve raz. Súčet čísel v diagonále tesne pod hlavnou (4 políčka) označme ako *skóre*. Dokážte, že nie je možné dosiahnuť skóre 20.

Úloha č. 2: Na Slovensku je šesť *veľkomiest* (Banská Bystrica, Bratislava, Košice, Nitra, Prešov a Žilina) a leteckú dopravu medzi nimi zabezpečujú dve spoločnosti. Medzi každými dvoma veľkomestami zabezpečuje letecké spojenie (*linku*) práve jedna spoločnosť. Dokážte, že sa nájdu tri také veľkomestá, že tri linky medzi nimi zabezpečuje tá istá spoločnosť.

Úloha č. 3: Na stretnutie prišlo 2002 ľudí, medzi nimi pán Abdul. Okrem nich je tam aj jeden novinár, ktorý hľadá pána Abdula. Novinár vie, že pán Abdul pozná každého, ale pána Abdula nikto nepozná. (Konečne príklad, v ktorom známosti nie sú vzájomné.) Novinár môže ukázať na nejakého človeka a spýtať sa niekoho iného, či pozná toho, na koho práve ukazuje a ten pravdivo odpovie áno alebo nie.
a) Zistite, či dokáže novinár za každých okolností nájsť Abdula na menej ako 2002 otázok.
b) Koľko najmenej otázok by potreboval novinár na nájdenie Abdula, ak by mal obrovské šťastie?

Úloha č. 4: Keď nemá *Jano Lašák* o robiť, vytrhne sieť z bránky a rozloží si ju na ľad. Tá vytvorí štvorcovú sieť. Potom náhodne rozloží niekoko pukov tak, aby ich stredy ležali na rôznych mrežových bodoch. (*Mrežový bod* je vrchol štvorca, ktorý je súčasťou štvorcovej siete.) Potom sa pozrie na každú dvojicu pukov a ak stred spojnice stredov týchto dvoch pukov leží v mrežovom bode, dá žuvačku na toto miesto. Koľko najmenej pukov musí *Jano* umiestniť na sieť, aby si mohol byť istý, že nájde miesto na umiestnenie aspoň jednej žuvačky?

Úloha č. 5: Množina 2002 (rôznych) čísel má vlastnosť, že keď zameníme každé z čísel súčtom zvyšných 2001 čísel, dostaneme tú istú množinu 2002 čísel. Dokážte, že súčin týchto 2002 čísel je záporný.

Úloha č. 6: V spoločnosti nazývame niekoho *bojazlivým*, ak má maximálne troch známych. (Známosti sú vzájomné, t.j. ak Janko pozná Ferka, tak aj Ferko pozná Janka.) V istej spoločnosti pozná každý aspoň troch bojazlivých ľudí. Ukážte, že sú všetci v tejto spoločnosti bojazliví. Koľko členov môže mať táto spoločnosť?

Úloha č. 7: Štvorec $n \times n$ je rozdelený na n^2 jednotkových štvorcov. Nejakých n z nich je ofarbených na čierno. Zistite, či je možné vždy vybrať biely obdĺžnik (alebo štvorec) s obsahom $S \geq n$, ak
a) $n = 7$,
b) $n = 8$.

Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8: Petra a Dalila sa najnovšie nehrávajú so zápalkami, ale s peniazmi, ktoré ušetria tým, že si nekupujú zápalky. Zoberú si n korunáčiek a umiestnia ich na stole do jedného radu. Dievča, ktoré je na ťahu, si vyberie jednu mincu, ktorá je znakom hore, otočí ju, ako aj všetky ostatné napravo od nej. Potom je na ťahu druhé dievča. Takto striedavo ťahajú, pričom začína skúsenejšia Petra. Prehrá tá, ktorá už nevie spraviť ťah. Ukážte, že táto hra vždy skončí po konečnom počte krokov. Ktorá hráčka má víťaznú stratégiu?

Úloha č. 9: Na pingpongovej súťaži sa hralo systémom každý s každým práve raz. Súťažiaci A dostal cenu, ak každého súpera B buď porazil, alebo porazil niekoho, kto vyhral nad B. Ukážte, že ak iba jeden súťažiaci dostal cenu, tak porazil každého hráča.

Úloha č. 10: Jedna veverička zbierala na zimu oriešky a nazbierala ich aspoň dva (počet orieškov je celé číslo). Prvý deň zjedla 1 oriešok a jednu stotinu zvyšných, druhý deň zjedla 2 oriešky a jednu stotinu zvyšných a tak ďalej, predposledný deň zjedla $n - 1$ orieškov stotinu zvyšných a nakoniec posledný, n-tý deň, zjedla posledných n orieškov. Koľko orieškov nazbierala naša veverička na zimu?
Veverička si môže na ďalší deň nechať neceločíselný počet orieškov.

Úloha č. 11: Na šachovnicu 10×10 umiestnime 9 pukov tak, aby bol každý puk na inom políčku. Potom pridávame puky podľa nasledujúceho pravidla: ak má políčko, na ktorom nie je puk, aspoň dve susedné políčka, na ktorých už sú puky, tak na toto políčko dáme puk. (Susedné políčka majú spoločnú stranu.) Ukážte, že týmito krokmi nikdy nezaplníme celú šachovnicu pukmi.

Termín odoslania riešení: 7. október 2002

Termín konania prednášky: 23. septembra 2002

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`