Zadania 1. série letnej časti KMS 2003/2004

Kategória ALFA

1. Syrovej kocke sa rozutekali číselká 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a schovali sa do všetkých jej vrcholov (každé číselko do jedného vrchola). Kocku objavila myška Baška a prehrýzla si cestičku z vrcholu s číselkom 1 do vrcholu s číselkom 2. Ďalej pokračovala postupne po vrcholoch 3, 4, 5, 6, 7, 8 a naspäť do vrcholu 1. Nato sa jej myšiak Miško spýtal, kadiaľ išla. Presné cestičky si už Baška nepamätala, ale spomenula si, že každá cestička, spájajúca dva za sebou idúce vrcholy, bola rovná a nikdy nehrýzla cestičku po hrane syrovej kocky. Mohla Baška hovoriť pravdu?

2. Už dlhší čas Miki vymýšľal originálny vianočný darček pre Janku, ale bez úspechu. Až jedného februárového rána našiel v snehu dva zlomky. Všimol si, že ich rozdiel je rovný ich súčinu a tak veľmi sa tomu potešil, že sa rozhodol Janke darovať päť takýchto dvojíc zlomkov. Pomôžte Mikimu nájsť päť dvojíc kladných zlomkov v základnom tvare, ktorých rozdiel je rovný ich súčinu.

3. Peťovi vzišli na um tri nezáporné celé čísla. Všimol si to Miťo, ktorý je veľký zberateľ čísel všetkých druhov a začal Peťa prehovárať, aby mu tie čísla prezradil. Peťo nesúhlasil, ale bol ochotný Miťovi povedať ľubovoľnú informáciu v tvare jedného prirodzeného čísla. Pomôžte Miťovi vymyslieť spôsob, ktorým keď Peťo zo svojich troch nezáporných celých čísel vyrobí jedno prirodzené, tak Miťo z neho bude vedieť spätne získať všetky tri Peťove čísla.

4. Čermo mal 8 čiernych a 8 bielych štvorcových dlaždičiek s rozmermi 10×10 cm. Každú dlaždičku rozrezal po uhlopriečke na dva trojuholníky. Čermo chce týmito trojuholníkmi vydláždičkovať stenu s rozmerom 40×40 cm tak, aby žiadne dva trojuholníky, ktoré susedia hranou, nemali rovnakú farbu. Koľko je takých vydláždičkovaní?

5. Na lúke sa stretli Šesťo, Aňa, Katka, Paľo, Janči, Tomáš, Miško a niekoľkí riešitelia KMS a všetci sa pochytali za ruky do jedného kruhu. V kruhu bolo a chlapcov, b dievčat a chlapec s chlapcom sa držali c-krát, dievča s dievčaťom sa držali d-krát. Aký bude rozdiel $c - d$, ak poznáme len rozdiel $a - b$?

6. Malá Erika ešte nevie riešiť problémy s číslami väčšími ako ona. Pomôžte jej s týmto: Nech x je prirodzené číslo. Ukážte, že $2005x^2 + 2002x + 2003$ nie je štvorcom žiadneho prirodzeného čísla.

7. Buggo má v komíne schované 2004-ciferné číslo (zapísané v desiatkovej sústave), o ktorom je známe len to, že keď sa z neho zoberie ľubovoľných 167 po sebe idúcich cifier, bude vzniknuté 167-ciferné číslo deliteľné číslom 2^{167}. Dokážte, že Buggove číslo je deliteľné 2^{2004}.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

8. Kubo má v rovine $n \geq 9$ bodov, pričom platí, že keď vyberie ľubovoľných 9 z nich, tak existujú dve kružnice také, že každý z vybraných bodov leží na aspoň jednej z nich. Dokážte, že existujú dve kružnice také, že každý z n Kubových bodov leží na aspoň jednej z nich.

9. Rúža a Foto si každý večer krátia čas nasledujúcou zábavkou. Rúža si zoberie štvorčekový papier veľkosti 102×102 štvorčekov a Foto si vymyslí celistvý útvar $\acute{U}$ zložený zo 101 takýchto štvorčekov. Rúža si potom zo svojho papiera vystrihne najväčší možný počet kópií útvaru $\acute{U}$ (pričom strihá iba pozdĺž naznačených línií). Zo všetkých útvarov $\acute{U}$ nájdite aspoň jeden, pre ktorý je počet vystrihnutých kópií minimálny.
Poznámka: Dva štvorčeky spojené len vrcholom netvoria celistvý útvar.

10. Feldo našiel na povale starú šachovú figúrku – delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o 1 políčko doprava, o 1 políčko hore alebo o 1 políčko po diagonále doľava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice 8×8. Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz?

11. Peťovi a Pištovi sa zdala táto séria príliš jednotvárna, tak si vymysleli takúto počtársku lahôdku. Nech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je neklesajúca postupnosť nezáporných celých čísel taká, že každé nezáporné celé číslo sa dá práve jedným spôsobom vyjadriť v tvare $a_i + 2a_j + 4a_k$, kde i, j a k sú nie nutne rôzne. Určte všetky možné hodnoty a_{2004}.

Kategória GAMA

Úlohy číslo **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

12. Rado vedúcim KMS oznámil, že geometrie nikdy nie je dosť a pokračoval takto. Nech body A_1, B_1, C_1 ležia postupne na výškach (ako úsečkách) AA', BB', CC' ostouhlého trojuholníka ABC tak, že súčet obsahov trojuholníkov ABC_1, BCA_1 a CAB_1 je rovný obsahu trojuholníka ABC. Nech H je ortocentrum trojuholníka ABC. Dokážte, že body A_1, B_1, C_1, H ležia na kružnici. Nakoniec Rado dodal, že čo riešiteľov nezabije, to ich posilní.

13. Šéfmág Mazo raz v spánku nechtiac začaroval štvorec čísel a to nasledovne. V magickom štvorci $n \times n$ sú vpísané čísla $1, 2, \ldots, n^2$ (každé práve raz). Stredy každých dvoch buniek sú spojené šípkami orientovanými z bunky s menším číslom do bunky s väčším číslom. Dokážte, že súčtom všetkých takýchto vektorov je nulový vektor.
Poznámka: Štvorec považujte za magický, ak súčet čísel v ľubovoľnom riadku alebo stĺpci je rovnaký.

14. A pozdravuje vás aj Tomáš: Bod K leží vo vnútri rovnobežníka $ABCD$, pričom platí $|CL| = |LK|$ a $|AM| = |MK|$, kde L a M sú postupne stredy strán AD a CD. Označme N stred úsečky BK. Ukážte, že $|\sphericalangle NAK| = |\sphericalangle NCK|$.

Termín odoslania riešení: **15. marec 2004** (pre zahraničie: **12. marec**)

Termín konania prednášky: 1. marec 2004

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`