Zadania 3. série letnej časti KMS 2003/2004

Kategória ALFA

1. Každý bod kružnice je ofarbený červenou alebo modrou farbou. Zistite, či musí existovať:

a) pravouhlý trojuholník s vrcholmi rovnakej farby ležiacimi na kružnici,
b) rovnoramenný trojuholník s vrcholmi rovnakej farby ležiacimi na kružnici.

2. Zistite, či je možné umiestniť cifry 0, 1, ..., 9 do kruhu tak, že súčet ľubovoľných troch po sebe idúcich cifier je najviac:

a) 13, b) 14, c) 15.

3. Trojuholník ABC o sebe nedávno zistil: "Keď vynásobím dĺžku strany a samú sebou a pripočítam dvojnásobok výšky na stranu a tiež vynásobenú samú sebou, platí, že je to číslo väčšie ako súčet druhých mocnín dĺžok strán b a c." ($a^2 + 2 \cdot v_a^2 > b^2 + c^2$) Pre aké trojuholníky to platí? Ako vyzerajú trojuholníky, pre ktoré platí: $a^2 + 2 \cdot v_a^2 = b^2 + c^2$?

4. Nájdite všetky trojice a, b, c (na poradí nezáleží) po dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel, pre ktoré je výraz

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

prirodzené číslo.
Poznámka: Dve prirodzené čísla nazývame nesúdeliteľné práve vtedy, keď ich najväčší spoločný deliteľ je 1.

5. Pravidelný 3, 4, 5 a 6–uholník sa dá narysovať iba s pomocou pravítka a kružidla, zatiaľ čo pravidelný 42–uholník nie. (Môžete si to skúsiť overiť.) Zistite a zdôvodnite, ktoré z nasledujúcich pravidelných n–uholníkov sa dajú takto narysovať a ktoré nie: $n = 15, 35, 120$.
Poznámka: Pravítkom sa dajú spojiť dva body priamkou. Kružidlom sa dajú prenášať vzdialenosti a rysovať kružnice.

6. Zistite, či môže existovať mnohočlen tvaru $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde čísla a_0, a_1, ..., a_n sú celé, pre ktorý platí, že hodnota mnohočlenu pre $x = 0$ je 0 a hodnota mnohočlenu v práve n rôznych celočíselných bodoch je n. Úlohu riešte pre $n = 4{,}7$.

7. Desaťciferné číslo (zapísané v desiatkovej sústave) nazývame rozkokošené, keď má všetky cifry rôzne a je násobkom 11111. Koľko rôznych rozkokošených čísel existuje?

Kategória BETA
Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

8. V štáte KaMsaS majú súvislú leteckú sieť. Štyri letištné spoločnosti Alfa, Beta, Gama a Omega spravujú KaMsaSké letiská, pričom každé letisko je spravované práve jednou spoločnosťou. Každý let v KaMsaSe je obojsmerný a spája letiská spravované rôznymi spoločnosťami. Navyše je každé letisko spojené letom s rovnakým počtom letísk ostatných troch spoločností (ak je letisko spravované spoločnosťou Alfa spojené s dvomi letiskami spravované spoločnosťou Beta, tak je spojené aj s dvomi letiskami spravované spoločnosťami Gama a Omega). Ukážte, že ak KaMsaSká vláda zruší dva obojsmerné lety, vedúce do toho istého letiska, letecká sieť ostane súvislá.
Poznámka: Súvislá letecká sieť je taká, v ktorej je možné dostať sa letecky cestou z každého letiska na ľubovoľné iné s prestupmi, alebo bez prestupov.

9. Nech $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ a $Q(x) = x^2 + px + q$ sú dva polynómy. Je známe, že polynóm P je záporný práve vtedy, keď je polynóm Q záporný a množina všetkých čísel, pre ktoré sú hodnoty polynómu P záporné, je interval, ktorého dĺžka je väčšia ako 2. Ukážte, že existuje reálne číslo t také, že platí $P(t) < Q(t)$.

10. Pre ľubovoľné reálne čísla x, y, z má binárna operácia $\diamond$ vlastnosť $(x \diamond y) \diamond z = x + y + x$. Ukážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí

$$a \diamond b = a + b.$$

Poznámka: Binárna operácia je predpis, ktorý dvojici reálnych čísel priraďuje reálne číslo.

11. Je daná postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$, kde $m \geq 3$. Označme $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Ukážte, že platí nerovnosť

$$\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leq 12\sum_{n=1}^{m} {a_n}^2.$$

Poznámka: K tomuto príkladu nie je poznámka.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

12. Zostrojme postupnosť reťazcov$\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ takú, že $R_1 = 1$ a číslo R_{n+1} vznikne z čísla R_n tak, že každé číslo i v R_n nahradíme skupinou čísel $123\dots i$ a na koniec pridáme číslo $n+1$. Ďalšie členy postupnosti potom vyzerajú nasledovne: $R_2 = 12$, $R_3 = 1123$, $R_4 = 11121234$. Ukážte, že ak si pre $n \geq 2$ napíšeme číslo R_n do riadku a pod neho to isté číslo R_n s obráteným poradím cifier, tak v každom stĺpci bude práve jedna jednotka.

13. Osi uhlov pri vrcholoch A, B, C trojuholníka ABC postupne pretínajú jemu opísanú kružnicu v bodoch K, L, M. Na úsečke AB zvoľme bod R. Pre body P a Q platí nasledovné: $RP \parallel AK$, $BP \perp BL$, $RQ \parallel BL$, $AQ \perp AK$. Ukážte, že priamky KP, LQ a MR prechádzajú jedným bodom.

14. Nájdite všetky kladné celé čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ také, že platí

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

pričom $a_0 = 1$ a $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geq a_k^2(a_k - 1)$ pre $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Odporúčaná literatúra

T. Hecht, Z. Sklenáriková: Metódy riešenia matematických úloh
L. C. Larson: Metódy riešenia matematických problémov
J. Sedláček: Co víme o přirozených číslech, ŠMM 2
F. Veselý: O dělitelnosti čísel celých, ŠMM 14
L. Bukovský, I. Kluvánek: Dirichletov princíp, ŠMM 25
L. Davidov: Funkcionální rovnice, ŠMM 55
J. Bosák: Úvod do teorie grafů
`http://kms.sturak.sk/debata.php`

Výlety

Milý riešiteľu,
tento kus textu prosím neprehliadni, lebo bol nakopírovaný špeciálne do Tvojich zadaní! Vytipovali sme si Ťa totiž ako nádejného účastníka Veľkého Aprílového Výletu seminárov Trojstenu, menovite FKS, KMS, KSP (v abecednom poradí). Tak pozorne čítaj informácie: stretneme sa na AS Mlynské Nivy (v Bratislave – pozn. pre cezpoľných) o 7:10 ráno, nástupište 42. Autobus nám pôjde o štvrť hodiny neskoršie. Aby Ťa tam šofér nevidel od dnešného dňa každé ráno, čakáme Ťa v sobotu 17.apríla. Odcestujeme do Smoleníc, obzrieme Smolenický zámok, mrkneme do jaskyne Driny, potom trochu driny a chodenia a zalomíme to v Plaveckom Mikuláši. Ak ukecáš ostatných, resp. ak ostatní ukecajú Teba, tak možno až v Plaveckom Podhradí. Návrat do Bratislavy bude medzi 19:30 a 19:45, ako sa podarí. Zober si (pre istotu) 200 Sk na cestovné, výletové háby, jedlo, pitie a vôbec, nech Ti nič nechýba. Ak si si aspoň na $50 + \varepsilon\%$ istý, že prídeš, tak napíš nám na buggo@mist.sk alebo poko@ksp.sk Tešíme sa!

Termín odoslania riešení: **3. máj 2004** (pre zahraničie: **30. apríl 2004**)

Termín konania prednášky: 26. apríl 2004

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `http://kms.sturak.sk/`