Zadania 2. série zimnej časti KMS 2004/2005

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Do kružnice s polomerom 1 vpíšeme obdĺžnik so šírkou b a výškou h a rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky b, ktorá je súčasne stranou obdĺžnika. Pre aké hodnoty h majú obdĺžnik a trojuholník rovnaký obsah?

Úloha č. 2:
Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak poznáte dĺžky jeho uhlopriečok, dĺžku priečky spájajúcej stredy nerovnobežných protiľahlých strán a jeden z uhlov pri základni.

Úloha č. 3:
Máme danú kružnicu k, priamku p a číslo r. Nájdite všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú priamky p a kružnice k a majú polomer veľkosti r. Dotyk kružníc uvažujte vnútorný aj vonkajší. Preveďte diskusiu o počte riešení.

Úloha č. 4:
Máme pravouhlú suradnicovú sústavu (karteziánsku). Body A, B, C, D majú porade súradnice [0, 0], [4, 3], [3, 1], [4, 0]. Dokážte, že veľkosť uhla BAC je rovná veľkosti uhla CAD.

Úloha č. 5:
V rovine leží päť bodov O, A, B, C, D, pričom A, B, C, D sú vrcholmi konvexného štvoruholníka. Pre ich vzdialenosti platí $|OA| \leq |OB| \leq |OC| \leq |OD|$. Dokážte, že pre obsah P štvoruholníka $ACBD$ vždy platí

$$P \leq \frac{1}{2}(|OA| + |OD|)(|OB| + |OC|)\,.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.
Poznámka: Štvoruholník je konvexný práve vtedy, keď každý jeho vnutorný uhol je menší ako 180°.

Úloha č. 6:
Máme pravouhlý rovnoramenný trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. K nemu je priložený pravouhlý rovnoramenný trojuholník CDE s pravým uhlom pri vrchole C tak, že polpriamka CD je totožná s polpriamkou CB. Označme P, Q, R, S porade stredy úsečiek AB, BD, DE a EA. Dokážte, že štvoruholník $PQRS$ je štvorec.

Úloha č. 7:
Vnútri daného uhla s vrcholom V je daný bod P. Veďte bodom P priamku p tak, aby mal trojuholník AVB minimálny obsah, pričom A, B sú priesečníky priamky p s ramenami uhla.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Na strane BC lichobežníka $ABCD$ ($BC \parallel AD$) je zostrojený bod P tak, že $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle DPM|$, kde M je priesečník uhlopriečok AC a BD. Dokážte, že bod B je rovnako vzdialený od priamky DP ako bod C od priamky AP.

Úloha č. 9:
Je daný uhol s vrcholom O a kružnica k, ktorá sa dotýka jeho strán v bodoch A a B. Polpriamka p prechádza bodom A, je rovnobežná s OB a pretína kružnicu k v bode C. Úsečka OC pretína kružnicu k v bode E. Priamky AE a OB sa pretínajú v bode L. Ukážte, že platí $|OL| = |LB|$.

Úloha č. 10:
Ukážte, že v euklidovskej rovine neexistujú 4 body také, že vzdialenosť medzi každými dvomi bodmi je nepárne prirodzené číslo.

Úloha č. 11:
V trojrozmernom priestore je daných n bodov A_1, A_2, …, A_n tak, že každé tri z nich tvoria trojuholník s jedným uhlom väčším ako 120°. Dokážte, že je možné pospájať všetky tieto body do lomenej čiary A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_n} tak, aby každé dve susedné hrany lomenej čiary tvorili uhol väčší ako 120°.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nájdite všetky reálne riešenia $(x_1, \ldots, x_5)$ sústavy nerovníc

$$\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leq 0\\
(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leq 0\\
(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leq 0\\
(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leq 0\\
(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leq 0\,.
\end{aligned}$$

Úloha č. 13:
Nájdite všetky prvočísla p, q, pre ktoré je zlomok

$$\frac{(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)}{pq}$$

celým číslom.

Úloha č. 14:
Kružnicu vpísanú trojuholníku ABC označme k a body jej dotyku so stranami BC a AC postupne D_1 a E_1. Na stranách BC a AC zvolíme body D_2 a E_2 tak, aby $|CD_2| = |BD_1|$ a $|CE_2| = |AE_1|$, bod P je priesečník úsečiek AD_2 a BE_2. Kružnica k pretína úsečku AD_2 v dvoch bodoch, ten bližšie k bodu A označíme Q. Ukážte, že platí $|AQ| = |D_2P|$.

Odporúčaná literatúra

Šedivý, J.: O podobnosti v geometrii, ŠMM 7. Mladá fronta, Praha, 1963
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Fonód, T. – Maxian, M: Geometrické perličky. Metodické centrum v Bratislave, Bratislava, 1997.
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: Geometry revised. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967.
Engel, A.: Problem–solving strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

Termín odoslania riešení: **2. november 2004** (pre zahraničie 29. október 2004)

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava kms.sturak.sk