Zadania 3. série letnej časti KMS 2004/2005

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Dajú sa v čísle 54 806 372 navzájom vymeniť dve číslice tak, aby vzniknuté číslo bolo deliteľné ôsmimi? Ak áno, nájdite všetky možnosti.

Úloha č. 2:
Kde bolo, tam bolo, na lúke je päť trpaslíkov, Erika, Feri, Kika, Lucia a Mazo. Každý z nich má na hlave buď červenú, alebo modrú čiapku. Aj keď žiadny trpaslík nevidí svoju čiapku, ten, ktorý má červenú čiapku, vždy hovorí pravdu. Trpaslík, ktorý má modrú čiapku, vždy klame. Jednotlivý trpaslíci povedali nasledujúce výroky:

Erika: „Vidím tri modré a jednu červenú čiapku.“
Feri: „Vidím štyri červené čiapky.“
Kika: „Vidím jednu modrú a tri červené čiapky.“
Lucia: „Vidím štyri modré čiapky.“

Zistite, aké čiapky môžu mať jednotlivý trpaslíci. Nájdite všetky možnosti.

Úloha č. 3:
Zistite, koľkými spôsobmi môžeme z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ vybrať trojprvkovú podmnožinu, ktorej súčin prvkov je deliteľný štyrmi.

Úloha č. 4:
Rúža a Dada striedavo umiestňujú kvetinky na políčka šachovnice rozmerov 7×3. Každé z dievčat v každom ťahu položí práve jeden kvietok na niektoré z prázdnych políčok. Rúžine kvetinky sú slnečnice a Dadine sú ruže. Víťazkou je tá, ktorá prvá položí svoju kvetinku na všetky štyri rohové políčka nejakého obdĺžnika, tvoreného políčkami šachovnice. Dokážte, že táto ich hra je veľmi zábavná, to znamená, že nikdy nemôže skončiť remízou.

Úloha č. 5:
Nájdite všetky dvojice reálnych čísel (p, q), pre ktoré platí $p + q = 2005$ a zároveň má rovnica $x^2 + px + q$ dve celočíselné riešenia.

Úloha č. 6:
Uvažujme nasledujúce výroky o rovnici $x|x| + px + q = 0$, kde p, q sú reálne parametre.

a) Má najviac tri reálne riešenia.
b) Má najmenej jedno reálne riešenie.
c) Má reálne riešenie, iba ak $p^2 - 4q \geq 0$.
d) Má tri reálne riešenia, ak $p < 0$ a $q > 0$.

Koľko z nich je pravdivých? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Úloha č. 7:
Osem spevákov sa zúčastnilo hudobného festivalu, kde vystúpili s m piesňami ($m > 0$). Každú pieseň spievali štyria z nich a každá dvojica spievala v rovnakom počte piesní ako ľubovoľná iná dvojica. Aké je najmenšie m, pre ktoré je to možné? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Najviac koľko veží je možné umiestniť na políčka šachovnice rozmerov $m \times n$ tak, aby každá veža ohrozovala práve dve ďalšie? Svoje tvrdenie dokážte.

Poznámka: Dve veže sa ohrozujú, ak sú umiestnené v rovnakom riadku alebo stĺpci a medzi nimi sa nenachádza iná veža.

Úloha č. 9:
K daným číslam 7 a 2 vytvoríme postupnosť $7, 2, 1, 4, 2, 4, 8, 8, 3, 2, \ldots$ tak, že postupne násobíme dvojice susedných členov a výsledok pripojíme ako ďalší jeden alebo dva členy v závislosti od toho, či je súčin jednomiestne alebo dvojmiestne číslo. Dokážte, že číslica 6 sa v postupnosti objaví nekonečne veľakrát.

Úloha č. 10:
Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré spĺňajú rovnosť

$$f(y + zf(x)) = f(y) + xf(z)$$

pre každú trojicu reálnych čísel x, y, z.

Úloha č. 11:
Nájdite všetky dvojice celočíselných parametrov $(p,\, q)$, pre ktoré má rovnica

$$x^3 - y^3 = pxy + q$$

s neznámymi x, y nekonečne veľa riešení v obore celých čísel.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nech O je vnútorný bod trojuholníka ABC. Priamky OA, OB, OC pretínajú strany trojuholníka po rade v bodoch A_1, B_1, C_1 (po rade rôznych od bodov A, B, C). Nech R_1, R_2, R_3, R sú polomery kružníc opísaných postupne trojuholníkom OBC, OCA, OAB, ABC. Dokážte, že

$$\frac{|OA_1|}{|AA_1|}R_1 + \frac{|OB_1|}{|BB_1|}R_2 + \frac{|OC_1|}{|CC_1|}R_3 \geq R\,.$$

Úloha č. 13:
Nech a, b, c sú také reálne čísla, že polynóm $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ má tri reálne korene (nie nutne rôzne). Dokážte, že platí

$$12ab + 27c \leq 6a^3 + 10(a^2 - 2b)^{3/2}\,.$$

Kedy nastáva rovnosť?

Úloha č. 14:
V rovine trojuholníka ABC je daný bod O a kružnica k prechádzajúca bodom O tak, že priamky OA, OB a OC pretínajú kružnicu k po rade v bodoch P, Q, R, rôznych od bodu O. Body K, L, M (v tomto poradí) sú priesečníky kružnice k s kružnicami opísanými trojuholníkom BOC, AOC, AOB, rôzne od bodu O. Dokážte, že priamky PK, QL, RM prechádzajú jedným bodom.

Odporúčaná literatúra

Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh I. SPN, Praha, 1990.
Kaucký, J.: Kombinatorické identity. Veda, Bratislava, 1975.
Engel, A.: Problem-solving strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.
www.kms.sk/kniznica

Náboj, Akadémia a Klub Trojstenu.

S radosťou Vám oznamujeme, že 15. apríla bude **Náboj** a 13. mája **Akadémia Trojstenu.** Obe tieto obľúbené akcie budú sprevádzané sobotňajším **Klubom Trojstenu.** Na tieto akcie Vás zároveň srdečne pozývame. Bližšie informácie nájdete na našich stránkach www.kms.sk.

Termín odoslania riešení: **25. apríl 2005** (pre zahraničie 22. apríl 2005)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. www.kms.sk