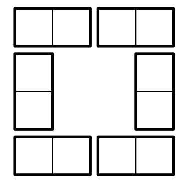
Zadania 1. série zimnej časti KMS 2006/2007

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Na plote sedia vrabce a holuby. Keď päť vrabcov odletí, na plote ostanú na každého vrabca dva holuby. Ak potom odletí ešte aj 25 holubov, ostanú na každého holuba tri vrabce. Nájdite pôvodný počet vrabcov a holubov.

Úloha č. 2:
Na stole je položených šesť kusov domina tak ako na obrázku. Aký je najmenší možný počet bodiek na týchto dominách?



Poznámka: Na každej polovici domina je umiestnených 0 až 6 bodiek, pričom na dvoch polovičiach toho istého kusu domina môžu byť aj rôzne počty bodiek. Každá sada domina obsahuje každý prípustný kúsok práve raz, to znamená, že obsahuje 28 kúskov domina.

Úloha č. 3:
Keď bol Foto malý, dostal na vianoce daväť kociek, na ktorých boli čísla $1, 2, \ldots, 9$. (Na každej kocke jedno, každé číslo na práve jednej.) Rúža bol vtedy ešte menší a preto kocku s číslom 8 zjedol. Fotovi neostalo nič iné, iba zo zvyšných kociek vytvárať dvojciferné prvočísla, vždy štyri naraz. Keď ich vytvoril, zapísal ich súčet voskovkou na stenu. Hral sa takto už asi pol dňa, keď si uvedomil, že je hladný a že už vytvoril všetky možné štvorice prvočísel. Zistite, aké čísla boli na stene napísané, keď sa Foto odišiel najesť.
Poznámka: Rúža sa najesť neodišiel, pretože ráno zjedol kocku.

Úloha č. 4:
Na vybratie vhodného šéfa KMS bola zostavená komisia pozostavajúca z deviatich členov. Mali vybrať z troch kandidátov. Volili nasledovným spôsobom: Každý člen komisie si zostaví poradie kandidátov, prvému dá tri body, druhému dva body a poslednému jeden bod. Keď boli body sčítané, zistilo sa, že každý kandidát získal iný počet bodov a teda poradie bolo jasne určené. Jeden člen komisie si však všimol, že keby každý člen komisie vybral iba jedného kandidáta, konečné poradie by bolo presne opačné. Koľko bodov získali jednotliví kandidáti?

Úloha č. 5:
a) Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $2^n - 1$ aj $2^n + 1$ sú prvočísla.
b) Nájdite všetky prvočísla p také, že $4p^2 + 1$ aj $6p^2 + 1$ sú prvočísla.

Úloha č. 6:
Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $n + 200$ aj $n - 269$ sú tretie mocniny prirodzených čísel.

Úloha č. 7:
Na sústredení bolo 33 účastníkov. Každý účastník pravdivo odpovedal na dve otázky: „Koľko je na sústredení iných účastníkov s rovnakým krstným menom ako ty?“ a „Koľko je na sústredení iných účastníkov s rovnakým priezviskom ako ty?“. Medzi odpoveďami sa každé z čísel 0 až 10 vyskytovalo aspoň raz. Ukážte, že na sústredení museli byť dvaja účastníci s rovnakým krstným menom aj priezviskom.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
V zástupe je $2n$ bielych a $2n$ čiernych lôpt. Dokážte, že bez ohľadu na to, ako sú usporiadané, je vždy možné nájsť $2n$ za sebou idúcich lôpt, z ktorých práve n je bielych.

Úloha č. 9:
Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z také, že platí

$$2^x + 3^y = z^2.$$

Úloha č. 10:
Numizmatik Kristián Príslovka má 241 mincí s celkovou hodnotou 360 toliarov. (Hodnota každej mince v toliaroch je prirodzené číslo.) Môže si byť Kristián Príslovka istý, že vie tieto svoje mince rozdeliť na tri kôpky s rovnakou hodnotou?

Úloha č. 11:
Na ostrove žije n domorodcov. Jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kamienok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.
a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.
b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz? (Tento pocet kamienkov musí byt dostatocný, nech už sú vztahy na ostrove akékolvek.)

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Daný je ostrouhlý trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Nech T je stred kružnice opísanej trojuholníku AOC. Bod M je stredom strany AC. Body D a E ležia po rade na priamkach AB a CB tak, že uhly MDB a MEB sú rovnako veľké ako uhol ABC. Dokážte, že priamky BT a DE sú na seba kolmé.

Úloha č. 13:
Priamka prechádzajúca ťažiskom T trojuholníka ABC pretína stranu AB v bode P a stranu CA v bode Q. Dokážte, že

$$4 \cdot PB \cdot QC \leq PA \cdot QA.$$

Úloha č. 14:
Prirodzené čísla x, y väčšie ako 1 spĺňajú vzťah $2x^2 - 1 = y^{15}$.
a) Dokážte, že x je deliteľné piatimi.
b) Existujú celé čísla x, y väčšie ako 1 spĺňajúce spomínaný vzťah? Viete nájsť všetky také čísla?

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv/`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Termín odoslania riešení: **2. október 2006** (pre zahraničie 29. september 2006)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`