Zadania 3. série zimnej časti KMS 2007/2008

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Ondrej dostal na narodeniny tortu v tvare kruhu. Mamička mu ju rozrezala pätnástimi priamymi rezmi, z ktorých každý prechádzal cez jej stred. Dokážte, že uhol medzi niektorými dvoma susednými rezmi musel byť nanajvýš 12 stupňov.

Úloha č. 2:
Katka si z dovolenky pri mori priniesla šesť krásnych kamienkov. Keďže sa rada hrá, položila ich na stôl a rozdelila do niekoľkých kôpok. Potom odobrala po jednom kamienku z každej kôpky a z nich vytvorila novú kôpku. Ak by takýto krok stále opakovala, koľko kôpok a s koľkými kamienkami by mohla mať na stole po 30 krokoch? Nájdite všetky možnosti a zdôvodnite, prečo už žiadne iné neexistujú.

Úloha č. 3:
Hanka dostala ťažkú domácu úlohu – dokázať, že súčet $2^{60} + 7^{30}$ je deliteľný číslom 13. Keďže Hanka je poctivé dievča, úlohu si spraví sama. Skúste to však aj vy – viete, len tak pre istotu, aby si to Hanka mohla, hm… skontrolovať, hej, presne tak.

Úloha č. 4:
Nájdite všetky dvojice reálnych čísel x_1, x_2, ktoré spĺňajú obe nasledujúce rovnice a jednu nerovnicu.

$$\begin{aligned} x_2^4 - x_1^3 &= 5, \\ \frac{1}{x_2^2-1} - \frac{1}{x_2^2+1} &= \frac{1}{x_1^3}, \\ \sqrt{17x_2 - 5x_1} &\geq 1. \end{aligned}$$

Úloha č. 5:
Kika si narysovala konvexný štvoruholník $ABCD$. Potom spojila stredy jeho protiľahlých strán a dostala tak štyri menšie štvoruholníky, z ktorých sa jej podarilo poskladať rovnobežník. Je to náhoda? Dá sa to vždy? Prečo?

Úloha č. 6:
Dvaja hráči hrajú takúto hru: na tabuľu píšu čísla od 1 do 1000 vrátane, pričom ak je nejaké číslo c už napísané na tabuli, ďalší hráč na ťahu môže pripísať buď číslo $c+1$, alebo číslo $2c$. Čísla sa z tabule nezotierajú a každé môže byť napísané najviac raz. Prvý hráč začína, pričom na tabuli je napísané iba číslo 1. Vyhrá ten, kto prvý napíše číslo 1000. Pre ktorého z hráčov existuje víťazná stratégia? Popíšte ju. (Víťazná stratégia je návod ako hrať a vyhrať, nech sa súper snaží ako chce.)

Úloha č. 7:
Majme nekonečnú aritmetickú postupnosť[1], ktorá obsahuje iba prirodzené čísla. Dokážte, že ak obsahuje nejakú druhú mocninu prirodzeného čísla, potom obsahuje nekonečne veľa druhých mocnín prirodzených čísel.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech $ABCD$ je rovnobežník a E je bod na jeho strane AD. Na úsečke CE leží bod F tak, že úsečka BF je kolmá na úsečku CE. Bod G je osovo súmerný s bodom F podľa priamky AB. Zistite veľkosť pomeru $|AE|/|DE|$, ak viete, že A je stred kružnice opísanej trojuholníku BFG.

Úloha č. 9:
Dokážte, že čísla $1, 2, \ldots, 16$ vieme rozmiestniť na šachovnicu 4×4 tak, že každé použijeme práve raz a rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch políčkach susediacich stranou bude najviac 4. Dokážte, že ich nevieme rozmiestniť tak, aby sme opäť každé použili práve raz ale rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch susedných políčkach bol vždy najviac 3.

[1] Ak si prvý člen aritmetickej postupnosti označíme a_0, tak pre všetky prirodzené čísla n vieme ďalšie členy vyjadriť ako $a_n = a_{n-1} + d$. To znamená, že každý člen je o d väčší než predchádzajúci. Skúste si ešte premyslieť, že platí aj $a_n = a_0 + nd$.

<u>Úloha č. 10:</u>
Daná je priamka p a body A, B nepatriace priamke, ktoré ležia v jednej polrovine vzhľadom na priamku p. Nájdite na tejto priamke všetky body M s nasledujúcou vlastnosťou: uhol, ktorý zviera priamka p s úsečkou AM, je dvakrát väčší ako uhol, ktorý zviera priamka p s úsečkou BM.

<u>Úloha č. 11:</u>
Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y platí

$$f(x^3) + f(y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2).$$

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

<u>Úloha č. 12:</u>
V štvorci 1×1 sa zrazu objavilo konečne veľa úsečiek, ktoré majú súčet dĺžok 18. Každá z nich je rovnobežná s jednou zo strán štvorca a rozdeľujú ho na niekoľko častí. Bus si myslí, že obsah každej tejto časti je menší ako $0,01$. Môže mať pravdu?

<u>Úloha č. 13:</u>
Nech $\varphi(n, m)$ $(m \neq 1)$ je počet prirodzených čísel menších alebo rovných n, ktoré sú nesúdeliteľné s m. Nájdite všetky prirodzené m, ktoré spĺňajú

$$\frac{\varphi(n, m)}{n} \geq \frac{\varphi(m, m)}{m}$$

pre všetky prirodzené n.

<u>Úloha č. 14:</u>
a) Nájdite najväčšie možné (alebo dokážte, že neexistuje) reálne číslo p také, že pre každé prirodzené číslo n a reálne čísla $x_1, x_2 \dots, x_n$ platí nerovnosť

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n).$$

b) Majme pevne zvolené prirodzené číslo n. Nájdite najväčšie možné (alebo dokážte, že neexistuje) reálne číslo p také, že pre všetky reálne čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnosť

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n).$$

<u>Úloha č. 15:</u>
Nanešťastie sa nikomu nepodarilo pochopiť zadanie úlohy 14 z prvej série tak, ako sme ho my mysleli, preto sme sa rozhodli túto úlohu zadať znova, teraz azda jasnejšie:
Tri rovnaké odmerky sú do troch štvrtín naplnené rôznymi kvapalinami. Zistite, či je možné konečným počtom prelievaní dosiahnuť, aby aspoň v jednej odmerke vznikla zmes, ktorá obsahuje rovnaké množstvo každej kvapaliny. Kvapaliny možno prelievať, nie však vylievať. Pri prelievaní z odmerky A do odmerky B môžeme preliať *ľubovoľný* objem kvapaliny, ktorý nie je väčší ako objem voľného miesta v odmerke B. Napríklad: v trojlitrových odmerkách A a B sú 1 a 2 litre čučoriedkového džúsu. Potom môžeme z B pokojne preliať $\sqrt{2}$ litra džúsu do A.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **26. novembra 2007** (pre zahraničie 23. novembra 2007).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **29. novembra 2007**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`