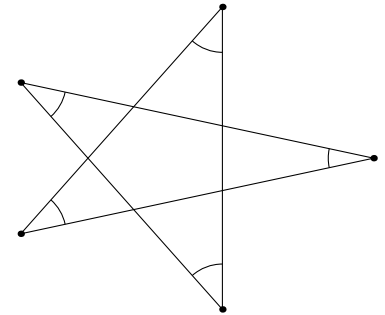


Zadania 2. série letnej časti KMS 2007/2008

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

Aký je súčet uhlov v cípoch päťcípej hviezdy? Päťcípa hviezda je útvar ako na obrázku, pričom jej strany ani uhly nemusia byť rovnako dlhé.



Úloha č. 2:

Nájdite šesťciferné číslo, ktoré končí číslicou 6 a keď túto číslicu presunieme na začiatok, dostaneme štvornásobok pôvodného čísla.

Úloha č. 3:

Na sústreďení sa stretlo 32 účastníkov. Už pred sústreďením každý poznal okrem seba aspoň 16 z ostatných účastníkov. Dokážte, že týchto účastníkov nevieme rozdeliť na dve (nie nutne rovnako veľké) neprázdne skupiny tak, aby nikto z jednej skupiny nepoznal nikoho z druhej skupiny.

Úloha č. 4:

Dokážte, že ak a, b, c sú dĺžky strán pravouhlého trojuholníka, pričom c je dĺžka prepony, potom pre všetky prirodzené čísla $k > 2$ platí:

- $a^3 + b^3 < c^3$,
- $a^k + b^k < c^k$.

Úloha č. 5:

Nech P je bod vnútri trojuholníka ABC . Zostrojme úsečky rovnobežné so stranami trojuholníka prechádzajúce bodom P . Obsahy troch trojuholníkov, ktoré nám týmto vznikli, sú 4, 9 a 49. Aký je obsah trojuholníka ABC ?

Úloha č. 6:

Označme si dve strany trojuholníka a, b a uhly oproti nim označme α, β . Ďalej označme v výšku na tretiu stranu tohto trojuholníka. Dokážte, že

- ak $\alpha + \beta = 90^\circ$, tak $1/a^2 + 1/b^2 = 1/v^2$,
- ak $|\alpha - \beta| = 90^\circ$, tak $1/a^2 + 1/b^2 = 1/v^2$.

Úloha č. 7:

Nech M je stred strany CD v rovnobežníku $ABCD$. Dokážte, že bod M leží na osi uhla BAD práve vtedy, keď je uhol AMB pravý.

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Do tabuľky s veľkosťou 22×22 vpíšeme čísla $1, 2, 3, \dots, 22^2$, každé práve raz. Je pravda, že vždy vieme vybrať dvojicu políčok susediacich rohom alebo stranou tak, že súčet čísel vpísaných v týchto políčkach bude deliteľný 4?

Úloha č. 9:

Majme lichobežník $ABCD$, v ktorom $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$, uhol pri vrchole A je pravý, jeho uhlopriečky sú navzájom kolmé a pretínajú sa v bode O . Nech OE je os uhla AOD , pričom bod E je bod úsečky AD . Nech F je taký bod na BC , že $EF \parallel AB$. Dokážte, že $|EF| = |AD|$.

Úloha č. 10:

Rozhodnite, či existuje funkcia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taká, že pre všetky $n \geq 2$ platí

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n).$$

Úloha č. 11:

Uvažujme mnohoúholník s celočíselnými stranami taký, že každé dve jeho susedné strany sú na seba kolmé (nemusia byť konvexné). Dokážte, že ak ho vieme pokryť neprekrývajúcimi sa dominovými kockami veľkosti 2×1 umiestnenými rovnobežne s jeho stranami, tak aspoň jedna z jeho strán má párnú dĺžku.

Katégoria GAMA

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Dokážte, že z ľubovoľnej množiny deviatich celých čísel vieme vždy vybrať rôzne čísla a , b , c a d tak, že číslo $a + b - c - d$ je deliteľné 20. Zistite, či to platí aj pre ľubovoľnú osemprvkovú množinu celých čísel.

Úloha č. 13:

Dokážte, že existuje také číslo M , že pre každé prirodzené $m > M$ existujú $a, b, c \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí

$$m^3 < a < b < c < (m + 1)^3,$$

a zároveň číslo abc je tretia mocnina prirodzeného čísla.

Úloha č. 14:

V ostrouhlom trojuholníku ABC máme vnútorný bod P . Priamka BP pretína AC v bode E , priamka CP pretína AB v bode F a priamka AP pretína EF v bode D . Označme K päťu kolmice z bodu D na BC . Ukážte, že KD je os uhla EKF .

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou www.kms.sk/archiv. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

www.cut-the-knot.org

www.kalva.demon.co.uk

www.cbel.com/math_recreations

Katégoria **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **26. marca 2008** (pre zahraničie 21. marca 2008).

Katégoria **GAMA**: Termín odoslania riešení je **31. marca 2008**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

www.kms.sk