Zadania 1. série zimnej časti KMS 2008/2009

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Koľkými spôsobmi si Kaja, Kika a Katka môžu rozdeliť 33 rovnakých čokolád tak, aby niektoré dve z nich mali spolu dvakrát toľko ako tretia?

Úloha č. 2:
Ondrej mal armádu zloženú zo 100 hračkárskych katapultov. Postavil ich do radu a spustil paľbu. Najskôr vystrelil každý druhý katapult, potom každý tretí a tak ďalej až po každý stý. (Áno, vtedy vystrelil len ten posledný.) Ktorý katapult vystrelil najviac krát? Koľkokrát to bolo?

Úloha č. 3:
Čarovné číslo sa skladá z troch rôznych cifier. Z týchto cifier ďalej poskladáme všetky možné trojciferné čísla, pričom každú z cifier použijeme v každom čísle práve raz. Súčet týchto novozložených čísel je 2003. Nájdite všetky čarovné čísla.

Úloha č. 4:
Označme $\sigma(n)$ súčet všetkých deliteľov čísla n (napr. $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$). Nazvime číslo n nákazlivé, ak $\sigma(n) > 2n$. Majme nejaké nákazlivé číslo a a vezmime si ľubovoľné prirodzené číslo b. Ukážte, že číslo $a \cdot b$ je tiež nákazlivé.

Poznámka: Znak σ je malé grécke písmeno sigma. Týmto písmenom sa tradične označuje okrem iného aj súčet deliteľov daného čísla. Mimochodom, veľká sigma sa píše Σ.

Úloha č. 5:
Máme nekonečne dlhý pásik papiera šírky 2 cm. Prehneme ho tak, že prekrývajúce sa vrstvy papiera vytvoria trojuholník. Aký najmenší obsah môže takýto trojuholník mať?

Úloha č. 6:
Pán a pani Smithovci boli na večierku, kde sa stretli s troma ďalšími manželskými pármi. Nastalo vzájomné podávanie rúk. Nikto nepodal ruku svojmu manželskému partnerovi, nikto nepodal ruku dvakrát tej istej osobe a samozrejme, nikto nepodal ruku sám sebe. Keď sa podávanie rúk skončilo, pán Smith sa každého vrátane svojej manželky opýtal, koľkokrát podal ruku. Na jeho prekvapenie každý dal inú odpoveď. Koľkokrát podala ruku pani Smithová?

Úloha č. 7:
Obdĺžnik rozmerov $1 \times k$, kde k je kladné celé číslo, budeme nazývať *zaujímavý.* Určte všetky prirodzené n, pre ktoré je možné rozrezať obdĺžnik $2008 \times n$ na niekoľko *zaujímavých* obdĺžnikov, pričom žiadne dva z nich nie sú rovnaké. Obdĺžniky, ktoré majú rovnaké rozmery, považujeme za rovnaké aj vtedy, keď je jeden z nich orientovaný vodorovne a druhý zvislo.

Poznámka: Štvorec považujte za špeciálny prípad obdĺžnika.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Na kružnici k so stredom O ležia rôzne body A, B, C, D, E v tomto poradí tak, že $|AB| = |BC|$. Označme S priesečník úsečiek BE a AD a T priesečník úsečiek BD a CE. Nech priamka ST pretína kružnicu k v bodoch X a Y. Dokážte, že $|BX| = |BY|$.

Úloha č. 9:
Predstavme si kovovú kružnicu, na ktorej sú rovnomerne rozložené čísla v poradí $1, 2, \ldots, N$. Na nej je položená otáčavá drevená kružnica, na ktorej sú opäť rovnomerne rozložené celé čísla $a_1, a_2, \ldots, a_N$ v tomto poradí. Súčet týchto N čísel je 1. Drevenú kružnicu vieme otočiť do N rôznych polôh tak, aby čísla na nej boli umiestnené práve nad číslami kovovej kružnice. Pre danú polohu drevenej kružnice urobíme súčet N súčinov takých, že vynásobíme číslo na drevenej kružnici s číslom na kovovej kružnici, ktoré sa nachádza pod ním. Keďže rôznych polôh drevenej kružnice je N, tak aj týchto súčtov dostaneme N. Ukážte, že všetky tieto súčty sú rôzne.

Úloha č. 10:
Dané sú nenulové celé čísla a, b, c také, že aj

$$u = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{a} \quad v = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

sú celé čísla. Dokážte, že $|a| = |b| = |c|$.

Úloha č. 11:
Nech $p(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi a nech c_n je ciferný súčet čísla $p(n)$. Dokážte, že v nekonečnej postupnosti $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sa nejaká hodnota vyskytne nekonečne veľakrát.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:
Zistite, či existujú funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre každé reálne číslo x platia rovnosti

a) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$

b) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$

Úloha č. 13:
Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je definovaná nasledovne:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 2, \\ a_3 &= 24, \\ a_n &= \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}} \quad \text{pre } n > 3. \end{aligned}$$

Dokážte, že n delí a_n pre každé prirodzené číslo n.

Úloha č. 14:
Nájdite rozdelenie pravouhlého trojuholníka so stranami 3, 4, 5 na štyri časti s najmenším možným priemerom. Priemer rozdelenia definujeme ako maximum zo vzdialeností medzi bodmi patriacimi do tej istej časti. Napríklad rozdelenie strednými priečkami má priemer 5/2.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých začalo na stránke KMS fungovať diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžte na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **6. októbra 2008** (pre zahraničie 3. októbra 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **10. októbra 2008**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`