Zadania 2. série zimnej časti KMS 2008/2009

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Vezmime si všetky prirodzné čísla menšie ako 211112. Ktorých čísel je medzi nimi viac – tých, ktoré obsahujú cifru 1, alebo tých, ktoré ju neobsahujú?

Úloha č. 2:
Uvažujme prirodzené čísla, ktoré dávajú zvyšok 1 po delení každým z čísel $2, 3, 4, \ldots, 11$.
a) Nájdite dve rôzne takéto čísla.
b) Najmenej o koľko sa musia takéto dve rôzne čísla líšiť?

Úloha č. 3:
Zapíšte číslo 2008 ako súčet niekoľkých prirodzených čísel, ktorých súčin je maximálny a ukážte, že neexistuje lepšie riešenie.

Úloha č. 4:
Bod P leží vnútri štvorca $ABCD$. Označme p a q rovnobežky so stranami tohto štvorca prechádzajúce bodom P. Ďalej označme r a s rovnobežky s uhlopriečkami štvorca opäť prechádzajúce bodom P. Priamky p, q, r a s celkovo rozdelia štvorec $ABCD$ na 8 častí. Ofarbime teraz tieto časti striedavo modrou a červenou farbou tak, aby každé dve časti susediace stranou mali rôznu farbu. Dokážte, že súčet obsahov častí, ktoré sú ofarbené na modro, je polovica z obsahu štvorca $ABCD$.

Úloha č. 5:
Na stranách rovnobežníka $ABCD$ zvoľme postupne body K, L, M, N (na každej strane jeden) tak, že $KLMN$ je štvoruholník s dvakrát menším obsahom ako $ABCD$. Ukážte, že aspoň jedna z uhlopriečok štvoruholníka $KLMN$ je rovnobežná s niektorou zo strán rovnobežníka.

Úloha č. 6:
Nech n je prirodzené číslo, ktoré je väčšie ako 1. Uvažujme nerovnosť

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})a_n$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú ľubovoľné nezáporné reálne čísla.
a) Dokážte, že daná nerovnosť platí pre $n = 2$.
b) Nájdite všetky ďalšie n, pre ktoré je nerovnosť splnená.

Úloha č. 7:
Klokan má karty, na ktorých sú čísla od 1 po n. Pozrie sa na prvú kartu. Ak je na nej číslo k, zmení zrkadlovo poradie prvých k kariet. Takto pokračuje až kým nedostane na prvej karte číslo 1. Musí sa mu to vždy po konečnom počte krokov podariť?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech $a_1, a_2, \ldots, a_{83}$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{83} \leq 82 + b_1 b_2 \cdots b_{83},$$

kde b_i je väčšie z čísel $\{1, a_i\}$ pre $i = 1, 2, \ldots, 83$.

Úloha č. 9:
Nech k a ℓ sú dve kružnice také, že stred S kružnice k leží na kružnici ℓ. Navyše sa kružnice k a ℓ pretínajú v dvoch rôznych bodoch M a N. Nech AB je ľubovoľný priemer kružnice k taký, že $|AM| > 0$ a $|BN| > 0$. Označme (v tomto poradí) A_1 a B_1 druhé priesečníky priamok AM a BN s kružnicou ℓ. Dokážte, že dĺžka úsečky A_1B_1 je rovná polomeru kružnice k.

Úloha č. 10:
Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré existujú kladné celé čísla n, x, y spĺňajúce rovnosť

$$p^n = x^3 + y^3.$$

Úloha č. 11:
Nech $d(n)$ označuje počet kladných deliteľov čísla $n^2 + n + 1$, kde n je prirodzené číslo. Dokážte, že nerovnosť

$$d(n) \geq d(n + 1)$$

platí pre nekonečne veľa rôznych prirodzených čísel n.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:
Kúzelníci Miťo a Mazo si pripravili malé vystúpenie. Na začiatku je v miestnosti s divákmi len Mazo. Diváci uložia n mincí do ľubovoľnej postupnosti znakov a hláv a vyberú si jedno číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Mazo potom otočí práve jednu mincu naopak a zavolá Miťa zo zákulisia, ktorý sa z rozloženia mincí snaží uhádnuť, aké číslo si diváci vybrali.

a) Dokážte, že ak sa toto kúzlo dá spraviť pre n_1 a n_2, potom sa dá spraviť aj pre $n_1 n_2$.

b) Nájdite všetky n, pre ktoré sa toto kúzlo dá spraviť.

Úloha č. 13:
Stred opísanej kružnice trojuholníka ABC označme O. Priamka prechádzajúca bodom O pretína vnútra strán AB a AC v bodoch M a N. Označme S a R stredy úsečiek BN a CM. Dokážte, že uhly ROS a BAC sú rovnaké.

Úloha č. 14:
Galéria moderného umenia má tvar n-uholníka (nie nutne konvexného). Vedenie galérie sa v nej rozhodlo rozostaviť niekoľko statických kamier so zorným uhlom 360 stupňov. Koľko najmenej (v závislosti od n) kamier potrebujeme, aby sme určite vedeli ustrážiť celú galériu?

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých začalo na stránke KMS fungovať diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžte na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **3. novembra 2008** (pre zahraničie 31. októbra 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **7. novembra 2008**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`