Zadania 2. série letnej časti KMS 2008/2009

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Daná je kružnica k s priemerom AB. V rovine kružnice k leží bod C taký, že trojuholník ABC je ostrouhlý. Zostrojte kolmicu z bodu C na úsečku AB len pomocou ceruzky a pravítka. Pravítko nemá mierku a nedajú sa ním robiť kolmice, len rysovať rovné čiary. Nezabudnite dokázať, že skonštruovaná priamka je naozaj kolmica z C na AB.

Úloha č. 2:
Katka bude mať onedlho narodeniny a tak jej Ondrej kúpil darček. Z obchodu ho doniesol v škatuli tvaru kocky s hranou dĺžky 1 m. Netušil však, že doma má už len jediný kus baliaceho papiera obdĺžnikového tvaru s rozmermi $1,5$ m a 4 m. Ondrej chce rozstrihnúť tento kus baliaceho papiera na dva kusy tak, aby doň mohol darček zabaliť. Ako má papier rozstrihnúť?

Úloha č. 3:
Daný je obdĺžnik $ABCD$ s obsahom $1\,\mathrm{cm}^2$. Na strane CD je zvolený bod E. Písmenami P, Q a R označíme body, ktoré sú po rade ťažiská trojuholníkov ABE, BCE a AED. Vypočítajte obsah trojuholníka PQR. Nezabudnite pritom zdôvodniť správnosť svojho výpočtu.

Úloha č. 4:
V trojuholníku XYZ platí $|\sphericalangle XYZ| = 45°$ a $|\sphericalangle YXZ| = 60°$. Vnútri neho sa nachádza bod P taký, že kružnica k so stredom v bode P pretína stranu XY v bodoch A a B, stranu YZ v bodoch C a D a stranu XZ v bodoch E a F. Navyše vieme, že úsečky AB, CD a EF majú rovnakú dĺžku. Aká je veľkosť uhla XPY ?

Úloha č. 5:
Dané sú kružnice k_1 a k_2, ktoré majú vonkajší dotyk v bode T. Bodom T prechádzajú dve priamky p a q tak, že sú sečnicami oboch kružníc. Označme A a B priesečníky priamky p s kružnicami k_1 a k_2 a C, D priesečníky priamky q s kružnicami k_1 a k_2, pričom body A, B, C, D sú rôzne od T. Dokážte, že úsečka AC je rovnobežná s úsečkou BD.

Úloha č. 6:
V zošite je nakreslená súradnicová sústava. V bode $[7, 11]$ stojí chrobák Ďuro a chce sa dostať domov do bodu $[-17, -3]$. Po papieri chodí rýchlosťou jeden dielik za sekundu, pričom nemusí chodiť len po vyznačenej štvorčekovej sieti. Napríklad z bodu $[3, 4]$ do bodu $[4, 5]$ vie preliezť najskôr za $\sqrt{2}$ sekúnd. Má to však jeden háčik, štvrtina papiera, kde je x-ová súradnica záporná a y-ová kladná je premočená. Ďuro sa po nej hýbe dvakrát pomalšie, teda rýchlosťou jeden dielik za dve sekundy. Po osiach x a y sa hýbe rýchlosťou jeden dielik za sekundu. Po akej ceste má Ďuro liezť, aby domov prišiel čo najskôr?

Úloha č. 7:
Dané sú tri rôzne body v rovine, ktoré neležia na priamke. Zostrojte štvoruholník, pre ktorý sú tieto body stredmi troch jeho rovnako dlhých strán.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Drak má v jaskyni zaujímavú dvojicu trojuholníkov. Platí pre ne, že dve strany jedného trojuholníka sú rovnako dlhé ako niektoré dve strany druhého trojuholníka a že trojuholníky sú podobné (ale nie nutne zhodné). Drak hrdo vyslovil nasledujúce tvrdenie: *Keby som mal hocijakú dvojicu trojuholníkov s takýmito vlastnosťami, tak koeficient podobnosti týchto trojuholníkov by bolo číslo medzi $(\sqrt{5}-1)/2$ a $(\sqrt{5}+1)/2$ a nebolo by rovné týmto krajným hodnotám.* Dokážte, že drak má pravdu.

Úloha č. 9:
Uvažujme tetivový štvoruholník $ABCD$. Na jeho diagonále AC zvolíme bod E tak, že DE je kolmá na stranu AB, na diagonále BD zvolíme bod F tak, že AF je kolmá na CD. Dokážte, že EF je rovnobežná s BC.

Úloha č. 10:
Nech ABC je rovnoramenný pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A. Body M a N sú nech sú vnútri úsečky BC také, že $|\sphericalangle MAN| = 45°$. Kružnica opísaná trojuholníku AMN pretína postupne AB a AC v bodoch P a Q. Dokážte, že $|BP| + |CQ| = |PQ|$.

Úloha č. 11:
Nech ABC je trojuholník a nech D je priesečník dotyčnice ku kružnici opísanej trojuholníku ABC v bode A a priamky BC. Nech E je priesečník kolmice na BC v bode B a osi strany BA. Nech F je priesečník kolmice na BC v bode C a osi strany CA. Dokážte, že body D, E a F ležia na jednej priamke.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:
Definujme funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pomocou nasledovnej rekurencie. Nech $f(1) = 1$ a $f(n+1)$ je najväčšie také m, že existuje aritmetická postupnosť prirodzených čísel

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_m = n$$

taká, že

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_m).$$

Dokážte, že potom existujú prirodzené čísla a, b také, že platí $f(an + b) = n + 2$ pre každé prirodzené n.

Úloha č. 13:
$ABCD$ je konvexný štvoruholník. Body P, Q ležia postupne na úsečkách BC, DC tak, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle DAQ|$. Dokážte, že trojuholníky ABP a ADQ majú rovnaký obsah práve vtedy, keď priamka prechádzajúca cez ich ortocentrá je kolmá na AC.

Úloha č. 14:
Šachová figúrka princ sa môže pohybovať vodorovne alebo zvislo, vždy práve o jedno políčko. Princom preskáčeme všetky políčka šachovnice 8×8 (na každé skočíme práve raz) a skončíme na políčku, z ktorého sme začínali. Môže sa stať, že počet horizontálnych a vertikálnych skokov bude rovnaký?

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **6. apríla 2009** (pre zahraničie 3. apríla 2009).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **9. apríla 2009**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`