Zadania 1. série zimnej časti KMS 2009/2010

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Prirodzené číslo budeme volať *popletené*, ak je párne a má nepárny počet cifier. Ak je nepárne a má párny počet cifier, budeme ho volať *zmätené*. Zistite, či je medzi číslami 1 až 1 000 000 (vrátane) viac tých popletených alebo zmätených.

Úloha č. 2:
Vačica chce vyplniť tabuľku 4×4 číslami 1, 2 a 3 tak, aby súčty čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch uhlopriečkach boli všetky navzájom rôzne. Poraďte jej, ako to môže urobiť.

Úloha č. 3:
Na trhu sa dajú s kupcom vymieňať červené a modré papagáje. Za jedného modrého papagája vám kupec dá päť červených. Za jedného červeného dostanete päť modrých. Na trh ste prišli s jedným červeným papagájom. Podarí sa vám po niekoľkých výmenách s kupcom získať rovnaký počet červených a modrých papagájov?

Úloha č. 4:
Klokan sa stavil s kengurou, že ju určite porazí v nasledujúcej hre. Začnú hrať na neofarbenej rovine. Najskôr ofarbí klokan jeden bod v rovine žltou farbou. Potom ofarbí kengura 10 bodov v rovine zelenou farbou. Hra pokračuje rovnako aj v ďalších ťahoch, klokan ofarbí jeden žltý a kengura 10 zelených bodov. Ak už je bod roviny ofarbený, nemožno ho prefarbiť. Klokan vyhrá, ak sa mu podarí vytvoriť rovnostranný trojuholník s vrcholmi žltej farby. Dokážte, že klokan vie vyhrať stávku, nech hrá kengura akokoľvek.

Úloha č. 5:
Súčin cifier čísla 1123 je šesť, čísla 5091 je nula. Nájdite súčet súčinov cifier všetkých štvorciferných prirodzených čísel.

Úloha č. 6:
Vtákopysk sa v potoku hral s kameňmi. Rozdelil ich na tri kôpky s 5, 49 a 51 kameňmi. Potom ich začal presúvať, a to tak, že buď spojil ľubovoľné dve kôpky do jednej, alebo rozdelil kôpku s párnym počtom kameňov na dve rovnaké. Mohla mu pri takomto presúvaní vzniknúť kôpka s 26 kameňmi? Ak áno, popíšte ako, a ak nie, zdôvodnite, prečo sa to nedá.

Úloha č. 7:
Austrálsky pastier Chuck sa po večeroch hráva so svojim pravidelným m-uholníkom ($m \geq 5$). Každý vrchol ofarbí jednou zo šiestich farieb tak, aby medzi jeho žiadnymi piatimi po sebe idúcimi vrcholmi neexistovali vrcholy ofarbené rovnakou farbou. Zistite hodnoty, ktoré môže nadobudnúť m.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Predstavte si, že okrem oviec má Chuck aj štvorčekovú mriežku rozmerov $2^n \times 2^n$. Túto mriežku chce pokryť dlaždičkami. Každá dlaždička pozostáva z troch štvorčekov a má tvar písmena L. Dlaždičky môžu byť ľubovoľne otočené. Chuck má pre vás dve úlohy:

a) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n môže Chuck vydlaždičkovať takúto mriežku, ak jej chýba jeden rohový štvorček.

b) Nech $n = 100$ a v mriežke chýba jeden ľubovoľný štvorček. Rozhodnite, či môže Chuck vždy vydlaždičkovať takúto mriežku.

Úloha č. 9:
Popri pasení oviec si Chuck privyrába v hoteli ako recepčný. Hotel má 11 podlaží a na každom podlaží je vedľa seba umiestnených 13 izieb. Môžete si predstaviť, že izby sú uložené v štvorčekovej mriežke rozmerov 11×13. Do hotela prišla jedna delegácia Aborigénov a jedna delegácia Maorov. Je im síce jedno, koľko izieb ktorá delegácia dostane, no obe majú na ubytovanie špeciálne požiadavky. Ľubovoľná izba Aborigénov má susediť s nepárnym počtom izieb Aborigénov a ľubovoľná izba Maorov má susediť s nepárnym počtom izieb Maorov. Pod susednými izbami k danej izbe rozumieme také, ktoré sú od nej hneď naľavo, napravo, hore alebo dole (ak také existujú). Rozhodnite, či Chuck môže do izieb rozdeliť členov delegácie podľa ich požiadaviek, ak každá izba v hoteli má byť zaplnená buď Aborigénmi alebo Maormi.

Úloha č. 10:
Doma u Chucka na stole je n rôznych na sebe položených kníh. Knihy začal nasledovne otáčať. V prvom ťahu otočil najvrchnejšiu knihu a položil ju naspäť. V druhom ťahu otočil dve vrchné knihy ako jeden blok a položil ich naspäť. Takto pokračoval aj ďalej a v n-tom ťahu otočil všetkých n kníh ako jeden blok a položil ich naspäť. V $(n+1)$-vom ťahu otočil opäť vrchnú knihu a položil ju naspäť. V $(n+2)$-hom ťahu otočil vrchné dve knihy ako jeden blok a položil ich naspäť. Takýmto spôsobom otáčal aj ďalej. Chuck odmieta skončiť skôr než sú knihy uložené presne tak, ako na začiatku, teda nielen v správnom poradí, ale aj správne orientované. Orientáciu knihy rozlišujeme podľa toho, či je kniha otočená prednou obálkou nahor alebo nadol. Všimnite si, že pri otočení nejakého bloku kníh sa orientácia každej knihy tohoto bloku zmení. Dokážte, že Chuck po konečnom počte ťahov skončí.

Úloha č. 11:
V knižke našiel Chuck založenú starú mapu Austrálie. Je na nej k miest. Označme r vzdialenosť dvoch miest, ktoré sú od seba vzdušnou čiarou najďalej. Dokážte, že pre ľubovoľný počet miest k existuje nanajvýš k (neusporiadaných) dvojíc miest, ktoré sú od seba vzdušnou čiarou vzdialené r.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Dokážte, že ak p je prvočíslo, tak číslo $p^p - 1$ má aspoň jedného prvočíselného deliteľa q, ktorý dáva zvyšok 1 po delení p.

Úloha č. 13:
Dané sú kružnice k a l s vonkajším dotykom v bode M. Nech A je ľubovoľný bod kružnice k, ktorý neleží na priamke spájajúcej stredy oboch kružníc. B a C sú rôzne body ležiace na kružnici l také, že priamky AB a AC sú jej dotyčnice. Priamky BM a CM znovu pretínajú k postupne v bodoch E a F. Bod D je priesečníkom priamky EF s dotyčnicou ku kružnici k v bode A. Aký útvar opíše bod D, keď meníme polohu bodu A?

Úloha č. 14:
Na matfyze v Sydney majú každí dvaja študenti, ktorí sa navzájom nepoznajú, aspoň jedného spoločného známeho (poznanie sa je symetrické). Ani jeden študent pritom nepozná všetkých ostatných. Očíslujme študentov od 1 po n a nech a_i označuje počet známych i-teho študenta. Vieme, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n^2 - n.$$

Nech $k \geq 3$ je najmenší počet študentov, ktorých možno usadiť okolo okrúhleho stola tak, aby každý poznal oboch svojich susedov. Nájdite všetky možné hodnoty k.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.kalva.demon.co.uk`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **5. októbra 2009** (pre zahraničie 2. októbra 2009).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **9. októbra 2009**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`