

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2009/2010**Kategória ALFA**Úloha č. 1:

V púšti je nakreslená kružnica, ktorej stred nie je vyznačený. Beduín má trojuholníkové pravítko s ryskou, na ktorom nie sú určené dieliky. Je dosť dlhé na to, aby dokázal spojiť ľubovoľné dva body na obvode kružnice. Navyše má paličku, ktorou vie kresliť do piesku. Ako vie nájsť pomocou týchto vecí presný stred kružnice?

Úloha č. 2:

Jašterička nakreslila do piesku konvexný šesťuholník $ABCDEF$. Platí v ňom, že strana AB je rovnobežná so stranou DE , strana BC je rovnobežná s EF a CD je rovnobežná s FA . Dokážte, že ak $|AB| = |DE|$, tak potom $|BC| = |EF|$ a $|CD| = |FA|$.

Úloha č. 3:

Škorpióny si stavajú príbytky v tvare kocky. Izby v nich sú tiež tvaru kociek (nie nutne rovnakých) a je nimi vyplnený celý priestor príbytku. Každý rok si postavia nový príbytok, ktorý má toľko izieb, aký je práve rok. Dokážte, že v tomto roku si škorpióny vedia postaviť príbytok (s 2009 izbami). Viete navyše nájsť taký rok v budúcnosti, v ktorom sa im to nemôže podariť?

Úloha č. 4:

Lichobežník $ABCD$ má obsah 1 cm^2 . Navyše strana AB je rovnobežná so stranou CD a platí, že $|AB| = 2|CD|$. Stred uhlopriečky AC označíme K . Priesečník AD a BK označíme L . Nájdite obsah štvoruholníka $CDLK$.

Úloha č. 5:

Dokážte, že v pravidelnom deväťuholníku $ABCDEFGHI$ platí, že $|AF| = |AB| + |AC|$.

Úloha č. 6:

Rovnoramenný trojuholník DEF má základňu EF kratšiu ako rameno. Na polpriamke FE leží bod K taký, že $|DF| = |FK|$ a na polpriamke EF leží bod L taký, že $|DE| = |EL|$. Ukážte, že platí $|KD|^2 = |DF| \cdot |KL|$.

Úloha č. 7:

Lichobežník $BLIK$ je vpísaný kružnici tak, že základňa BL je jej priemer. Označme T priesečník uhlopriečok lichobežníka a E stred úsečky BL . Ďalej skonštruujeme bod A tak, aby $BETA$ bol rovnobežník. Dokážte, že $|AB| = |AK|$.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5**, **6**, **7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:

V rovine je daných konečne veľa bodov. Ak si vyberieme ľubovoľné tri z nich, tak sú vrcholmi trojuholníka s obsahom menším ako 1. Dokážte, že existuje trojuholník s obsahom menším ako 4 taký, že všetky tieto body ležia v jeho vnútri alebo na jeho stranách.

Úloha č. 9:

Bod A leží vnútri uhla s vrcholom M . Lúč vychádzajúci z bodu A sa odrazí od jedného ramena uhla v bode B , potom od druhého ramena v bode C a napokon sa vráti späť do bodu A . Platí, že uhol odrazu je rovný uhlu dopadu. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku BCM leží na priamke AM .

Úloha č. 10:

Do štvorstenu $ABCD$ je vpísaná guľa. Štyri rôzne roviny dotýkajúce sa gule a rovnobežné so stenami štvorstenu (rôzne od samotných stien) odtínajú štyri menšie štvorsteny. Dokážte, že súčet dĺžok všetkých ich 24 hrán je rovný dvojnásobku súčtu dĺžok hrán celého štvorstenu $ABCD$.

Úloha č. 11:

Nech ABC je trojuholník a Q vnútorný bod taký, že $\angle BQC = 90^\circ$ a $\angle BAQ = \angle BCQ$. Nech U , V sú v tomto poradí stredy strán AC , BC . Predpokladajme, že $|BQ| = 2|QU|$. Dokážte, že body A , Q , V ležia na priamke.

Kategória GAMA

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:

Všetky koeficienty polynómu $P(x)$ sú rovné 1 alebo -1 . Ďalej vieme, že 1 je jeho 2^k -násobným koreňom pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. Dokážte, že stupeň $P(x)$ je aspoň $2^{k+1} - 1$.

Úloha č. 13:

Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a + b + c = 3$. Dokážte, že

$$(3 - 2a)(3 - 2b)(3 - 2c) \leq a^2 b^2 c^2.$$

Úloha č. 14:

Dokážte, že v každej aritmetickej postupnosti štyridsiatich rôznych prirodzených čísel existuje člen, ktorý nevieme napísať v tvare $2^m + 3^n$, kde m, n sú nezáporné celé čísla.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou kms.sk/archiv. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

www.cut-the-knot.org

www.kalva.demon.co.uk

www.cbel.com/math_recreations

Kategória **ALFA, BETA**: Termín odoslania riešení je **2. novembra 2009** (pre zahraničie 30. októbra 2009).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **6. novembra 2009**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

kms.sk