Zadania 2. série letnej časti KMS 2009/2010

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Do gule s objemom 1 m^3 vpíšeme kocku. Do tejto kocky zase vpíšeme guľu. Vypočítajte objem tejto menšej gule.

Úloha č. 2:
Nad odvesnami pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C sú zvonku zostrojené štvorce $ACPQ$ a $BCRS$. Nech Q' a S' sú päty kolmíc z bodov Q a S na priamku AB. Dokážte, že $|S'B| = |AQ'|$.

Úloha č. 3:
Majme dve rovnobežné úsečky AB a CD, ktoré neležia na jednej priamke. K dispozícii máme iba ceruzku a pravítko bez rysky a bez mierky. Nájdite pomocou týchto dvoch nástrojov stred úsečky AB a stred úsečky CD, ak

a) $|AB| \neq |CD|$,

b) $|AB| = |CD|$.

Úloha č. 4:
V trojuholníku ABC sa os uhla pri vrchole A, os strany AB a výška z bodu B sa pretínajú v jednom bode. Dokážte, že aj os uhla pri vrchole A, os strany AC a výška z bodu C sa pretínajú v jednom bode.

Úloha č. 5:
Dané sú kružnice k_1 a k_2. Body O a P sú v tomto poradí stredy kružníc k_1 a k_2. Dotyčnice z bodu O ku kružnici k_2 pretínajú kružnicu k_1 v bodoch A a B tak, že body O a P sú v rôznych polrovinách určených priamkou AB. Podobne dotyčnice z bodu P ku kružnici k_1 pretínajú kružnicu k_2 v bodoch C a D tak, že body O a P ležia v rôznych polrovinách určených priamkou CD. Dokážte, že $|AB| = |CD|$.

Úloha č. 6:
Majme pravouhlý trojuholník, kde r je polomer vpísanej kružnice, R polomer opísanej, s je obvod a c je dĺžka prepony. Dokážte, že platí

$$\frac{s}{c} - \frac{r}{R} = 2$$

Takisto zistite, pre ktoré pravouhlé trojuholníky nadobúda pomer r/R najväčšiu hodnotu a určte túto hodnotu.

Úloha č. 7:
Daný je trojuholník, ktorý nie je rovnostranný ani rovnoramenný. Uvažujme spojnice vrcholov trojuholníka s vnútornými bodmi príslušných protiľahlých strán. Koncové body každej z týchto spojníc rozdeľujú obvod trojuholníka na dve rovnako dlhé časti. Musia byť nutne tieto tri spojnice rôzne dlhé?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Uvažujme kružnicu k so stredom S. Nech AB je ľubovoľná tetiva tejto kružnice. Označme CD priemer kružnice kolmý na AB a nech sa pretína s AB v bode M. Nech E je ľubovoľný bod vnútri kratšieho oblúka BC kružnice k. Ďalej P je priesečník EM s kružnicou k a L je priesečník ED s tetivou AB. Označme Q priesečník CL s kružnicou k. Dokážte, že úsečky AP a BQ sú rovnako dlhé.

Úloha č. 9:
Je daný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB kratšou ako ramená. Nech X a Y sú v tomto poradí body na ramenách AC a BC, pričom XY má rovnakú dĺžku ako AB. Nech Z je taký bod v rovine, že trojuholník XYZ je zhodný s trojuholníkom ABC. Určte geometrické miesto bodov v rovine, ktoré vyplnia body Z pre všetky možné polohy trojuholníka XYZ.

Úloha č. 10:
Majme trojuholník ABC a nech r je os vonkajšieho uhla ABC, ďalej P a Q sú päty kolmíc z bodov A a C na priamku r. Označme M priesečník priamok CP a BA, označme N priesčník priamok AQ a BC. Ukážte že priamky MN, r a AC prechádzajú jedným bodom alebo sú navzájom rovnobežné.

Úloha č. 11:
V trojuholníku ABC má vnútorný uhol pri vrchole B veľkosť 120°. Os uhla ABC pretína stranu AC v bode M a os vonkajšieho uhla BCA pretína priamku AB v bode P. Úsečka MP pretína stranu BC v bode K. Dokážte, že uhly AKM a KPC majú rovnakú veľkosť.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**. Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Čísla $1, 2, 3, \ldots, 100$ sú usporiadané po obvode kruhu tak, že každé číslo je buď väčšie od svojich oboch susedov alebo je od oboch menšie. Ak vymazanie dvojice susedných čísel nenaruší túto charakteristiku, takúto dvojicu nazveme *superdvojica*. Určte najmenší možný počet *superdvojíc.*

Úloha č. 13:
Pre každé prirodzené číslo $n > 1$ nájdite najväčšie možné reálne číslo p také, že nerovnosť

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1)$$

platí pre všetky n-tice nezáporných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Úloha č. 14:
Vrcholom pravidelného šesťuholníka sú priradené nezáporné celé čísla, ktorých súčet je 2009. Dráčik si môže vybrať jeden vrchol a jeho číslo nahradiť absolútnou hodnotou rozdielu čísel priradených susedným vrcholom. Dokážte, že konečnou postupnosťou takýchto krokov môže Dráčik dosiahnuť, že vo všetkých vrcholoch bude číslo 0.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **29. marca 2010** (pre zahraničie 26. marca 2010).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **2. apríla 2010**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.