Zadania 3. série letnej časti KMS 2009/2010

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Mravčekovia našli včera na lúke čísla 1 až 50. Vybrali si z nich 25 čísel a odniesli ich do mraveniska. Dnes našli na lúke čísla 51 až 100 a z nich si tiež vybrali 25 čísel a odniesli do mraveniska. Doma zistili, že medzi žiadnymi dvoma číslami v mravenisku nie je rozdiel 50, a že žiadne dve čísla nie sú rovnaké. Zistite, aký môže byť súčet čísel, ktoré si doniesli do mraveniska.

Úloha č. 2:
Húsenica dostala tri reálne čísla a, b, c. Spravila z nich tri nové čísla

$$a - b + 2010, \quad b - c + 2010, \quad c - a + 2010.$$

Zistila, že tieto nové čísla tvoria trojicu po sebe idúcich celých čísel (možno v inom poradí, ako sú napísané). Ktoré tri po sebe idúce čísla to môžu byť? Nájdite všetky riešenia.

Úloha č. 3:
Majme tri prirodzené čísla. Pre každú dvojicu z nich urobíme rozdiel ich súčinu a súčtu (od súčinu odčítame ich súčet). Pre jednu dvojicu vyjde kladný, pre druhú záporný. Určte, či vyjde tento rozdiel pre tretiu dvojicu kladný alebo záporný. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha č. 4:
V miestnosti KMS na stole leží 2002 kariet očíslovaných od 1 po 2002 (každé číslo je použité presne raz). Šváb a pavúk s kartami hrajú hru. Pavúk začína. Striedavo si berú karty, až kým sa všetky karty na stole neminú. Na konci hry si každý spočíta súčet čísel na všetkých kartách, ktoré si zobral. Vyhráva ten, ktorého súčet má na mieste jednotiek vyššiu cifru. Môže šváb alebo pavúk hrať tak, aby určite vyhral? Ak áno, ako? Nezabudnite svoje tvrdenie poriadne dokázať.

Úloha č. 5:
Lúčny koník Ferko píše test, ktorý sa skladá z 30 otázok. V každej otázke sú dve možnosti A a B, z ktorých je vždy správna práve jedna. Prešibaná lienka mu poradila, že počet otázok so správnou odpoveďou A nie je 15. Ferko má niekoľko pokusov na to, aby napísal test úplne správne. Pri každom teste Ferko musí odpovedať na všetky otázky. Po každom odovzdanom teste sa dozvie, na koľko otázok odpovedal správne. Nevie však, ktoré to sú.

a) Ako má Ferko odpovedať na otázky, aby vyplnil test bezchybne na 31. pokus?

b) Ako má Ferko odpovedať na otázky, aby vyplnil test bezchybne na 30. pokus?

V úlohách a) i b) popíšte postup, ktorým Ferko zistí, ako má odpovedať pri 30. resp. 31. pokuse.
Pomôcka: Po každom odovzdanom teste sa Ferko dozvie nejakú ďalšiu informáciu o teste, ktorú môže využiť pri ďalšom pokuse.

Úloha č. 6:
Určte, pre ktoré dvojice prirodzených čísel x, y platí rovnosť $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^x = 3^y$.

Úloha č. 7:
Na kružnici je rovnomerne rozmiestnených 20 jednotiek a 30 dvojok tak, že žiadne tri po sebe idúce čísla nie sú všetky rovnaké. Nájdite súčet súčinov všetkých trojíc po sebe idúcich čísel. (Takýchto súčinov je 50.)

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech n a m sú prirodzené čísla. Predstavme si, že máme v lese nekonečne veľkú šachovnicu. Šachová figúrka *roháč* sa v jednom ťahu pohne najprv o n políčok vodorovne alebo zvislo a potom o m políčok v kolmom smere. Skočí vlastne v tvare písmena L. Roháč skáče ľubovoľne po šachovnici a nikdy ho to neomrzí. Dokážte, že nekonečnú šachovnicu vieme ofarbiť čiernou a bielou farbou tak, že roháč po každom ťahu zmení farbu svojho políčka. Zdôvodnite toto tvrdenie pre ľubovoľné prirodzené čísla m a n.

Úloha č. 9:
Kladné reálne čísla $x,\ y,\ z$ spĺňajú vzťah

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}.$$

Dokážte, že potom platí

$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}<\frac{1}{3}.$$

Úloha č. 10:
Na reálnej číselnej osi máme daných n uzavretých intervalov, pričom $n \geq 2$. Pre prirodzené číslo k platí $2 \leq k \leq n$. Medzi každými k intervalmi (z daných n intervalov) vieme nájsť dva s neprázdnym prienikom. Dokážte, že vieme zvoliť $k-1$ reálnych čísel tak, aby každý z daných n intervalov obsahoval aspoň jedno zo zvolených čísel.

Úloha č. 11:
Prirodzené číslo b je väčšie ako jedna. Pre kladné reálne číslo a platí $1/a + 1/b > 1$. Dokážte, že nekonečná postupnosť čísel $\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor, \lfloor 3a \rfloor, \ldots$ obsahuje nekonečne veľa celočíselných mocnín čísla b.
Poznámka: $\lfloor x \rfloor$ predstavuje tzv. dolnú celú časť z x, t. j. najväčšie celé číslo a s vlastnosťou $a \leq x$.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Na obrázku je nakreslených $2n+1$ priamok tak, že žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, žiadne dve nie sú na seba kolmé a žiadne tri neprechádzajú jedným bodom. Najviac koľko ostrouhlých trojuholníkov (v závislosti od n) môže byť na obrázku?

Úloha č. 13:
Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je definovaná rekurentne vzťahmi

$$\begin{aligned} a_1 &= 20,\\ a_2 &= 30,\\ a_{n+2} &= 3a_{n+1} - a_n \text{ pre } n \geq 1. \end{aligned}$$

Nájdite všetky n, pre ktoré je $1 + 5a_n a_{n+1}$ štvorcom prirodzeného čísla.

Úloha č. 14:
Daný je kosoštvorec $ABCD$ s vpísanou kružnicou k. Vnútri uhla BAD mimo kosoštvorca $ABCD$ leží bod P. Rovnobežka s priamkou CD prechádzajúca bodom P pretína priamku BC v bode K, rovnobežka s priamkou BC prechádzajúca bodom P pretína priamku CD v bode L. Uvažujme z bodov K a L dotyčnice ku kružnici k rôzne od priamok BC a CD. Tieto dotyčnice sa pretínajú v bode M. Dokážte, že body A, M a P ležia na priamke.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Elektronické riešenia

Počnúc druhou sériou posúvame termín odoslania elektronických riešení na 17:00 v príslušný deň. Všetky potrebné informácie o ich odosielaní nájdete po prihlásení na stránke `kms.sk/eriesenia`.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **3. máj 2010** (pre zahraničie 30. apríl 2010).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **7. máj 2010**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.