

Zadania 1. série letnej časti KMS 2012/2013

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

Nájdite všetky možnosti pre 21 po sebe idúcich čísel, z ktorých je aspoň 8 prvočísel.

Úloha č. 2:

Nájdite prvočíslo p , pre ktoré platí, že $2013p + 1$ je druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla.

Úloha č. 3:

Reálne čísla a, b spĺňajú vzťah $a - b \geq 2$. Dokážte, že $a^4 + b^4 \geq 2$.

Úloha č. 4:

Z každého vrcholu konvexného mnohostena vychádzajú presne tri hrany, z ktorých aspoň dve sú rovnako dlhé. Dokážte, že daný mnohosten má tri hrany rovnakej dĺžky.

Úloha č. 5:

Kubo s Mojom si zvyknú krátiť čas nasledovnou hrou. Kubo hodí dvomi hracími kockami, sčíta body, ktoré mu na nich padli a tento súčet označí a . Ak je a väčšie ako deväť, tak znovu hodí dvomi kockami a súčet bodov, ktoré mu padli označí b . Ak a je menšie ako desať, tak hodí dvanásťstenom a počet bodov, ktoré mu padli označí b . Svoje výsledné skóre vypočíta ako súčet $a + b$. Mojo na začiatku hodí dvanásťstenom (má dvanásť stien, na ktorých sú čísla od jeden do dvanásť) a počet bodov, ktoré mu padli označí a . Zvyšok jeho hry je rovnaký ako Kubov. Vyhráva ten, koho výsledné skóre je väčšie¹. Rozhodnite, kto z nich vyhráva častejšie. Svoje rozhodnutie zdôvodnite.

Úloha č. 6:

Dominik Žltý mal vypočítať príklad $X \cdot Y/Z$, kde X je dvojciferné číslo, Y je trojciferné číslo a Z trojciferné číslo s číslicou 2 na mieste jednotiek. Výsledkom príkladu malo byť prirodzené číslo. Dominik ale prehliadol bodku a súčin $X \cdot Y$ chápal ako päťciferné číslo. Dostal tak sedemkrát väčší výsledok ako mal vyjsť. Aký príklad mal Dominik počítať?

Úloha č. 7:

Dokážte, že pre každé iracionálne číslo a existujú iracionálne čísla b, c také, že čísla $a + b$ a ac sú racionálne, a zároveň čísla $a + c$ a ab sú iracionálne.

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Vieme uložiť čísla 1 až 100 do štvorcovej siete 10×10 tak, aby v ľubovoľnom T-čku, zloženom zo štyroch políčok, bol súčet čísel párny? T-čko môže byť aj otočené.



Úloha č. 9:

Máme kladné celé čísla a, b . Posledná cifra výrazu $a^2 + ab + b^2$ je 0. Ukážte, že aj predposledná cifra musí byť 0.

Úloha č. 10:

Kuna, ako iste viete, je svetoznáma športovkyňa, ktorá sa preslávila hlavne poskakovaním po číslach. Najnovšie trénuje svoje zostavy poskakovania na spartakiádu. Správna zostava musí spĺňať:

- kuna na začiatku zostavy sedí na racionálnom čísle,
- ak sa nachádza na čísle a , tak nabudúce skočí na číslo $2a^2 - 1$,
- aspoň raz sa objaví na čísle, na ktorom už počas zostavy bola.

Aké zostavy má kuna v repertoári?

¹Ak majú rovnaké výsledné skóre, tak je remíza a nevyhráva ani jeden.

Úloha č. 11:

Edo si vyznačil na tabuli k rôznych bodov. O k vieme, že je to prirodzené číslo, ktoré je rovné nanajvýš 2013. Edo si z geometrie pamätá, že ľubovoľné dva rôzne body určujú priamku. Koľko rôznych priamok môže určovať Edova množina bodov?

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **25. február 2013** (pre zahraničie 22. február 2013).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

kms.sk

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.