Zadania 2. série zimnej časti KMS 2013/2014

Kovboj Monty Walsh sedel na svojom tátošovi a uháňal po šírych pláňach. Boli to už tri dni odkedy opustil Oakville a vydal sa po stope bankového lupiča Krivozubého Tonyho a jeho bandy Drzohubých. Aj keď bolo meno Montyho Walsha medzi kriminálnikmi dobre známe, jeho tvár bola skoro všetkým neznáma. Preto sa rozhodol, že sa zahrá na záporáka a infiltruje sa medzi Drzohubých. Vymyslel si krycie meno Walty Mash a pustil sa do roboty.

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Drzohubých je na divokom západe kopa a nie všetci sa poznajú. Preto na identifikáciu používajú tajný symbol. Montymu sa z rôznych zdrojov podarilo získať útržkové údaje o tomto symbole. Dozvedel sa, že symbolom je trojuholník ABC, ktorý má vrcholy označené v tomto poradí proti smeru hodinových ručičiek. Ďalej zistil, že veľkosť uhla pri vrchole B je $20°$, a že strana BC meria 5 centimetrov. Ako posledné zistil, že kružnica opísaná tomuto trojuholníku má polomer 3 centimetre. Pomôžte Montymu a skonštruujte tento trojuholník. Zároveň túto konštrukciu aj popíšte. Nezabudnite nájsť všetky riešenia a zdôvodniť, že iné neexistujú.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
S tajným symbolom vo vrecku sa Monty vybral priamo k táborisku Krivozubého Tonyho a niekoľkých ďalších Drzohubých. Ukázal im papier so symbolom a ihneď ho vzali medzi seba. Sedeli okolo švajčiarskej čokolády, ktorú nedávno ulúpili a rozmýšľali, ako si ju rozdeliť. Čokoláda mala tvar štvorca a tvorilo ju 6×6 menších tabličiek. Chceli ju rozdeliť na deväť kúskov tak, aby delili len pozdĺž tabličiek a aby im nič neostalo. Navyše má mať každý z týchto kúskov tvar obdĺžnika (aj štvorec je obdĺžnik). Banditi sa snažili rozdeliť čokoládu podľa týchto pravidiel tak, aby bol každý kúsok iného tvaru.[1] Monty sa na chvíľku zamyslel, a potom prehlásil, že to nie je možné. Vedeli by ste aj vy dokázať, že sa vždy nájdu aspoň dva rovnaké kúsky?

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Monty si svojou šikovnosťou rýchlo získal priazeň Drzohubých aj samotného Tonyho. O niekoľko dní sa banditi rozhodli prepadnúť jeden z troch dostavníkov, ktoré putovali z Longcreeku do Smallvillu. Časť bandy sa vydala na výzvedy a vrátili sa s týmito informáciami. V prvom dostavníku bolo p vriec dolárov, v druhom bolo $p^2 + 2$ vriec dolárov a v treťom bolo $p^3 + 2$ vriec dolárov. Navyše zvedi zistili, že v prvom aj druhom dostavníku je prvočíselný počet vriec. Banditi nechcú okradnúť dostavník s prvočíselným počtom vriec, problémy s následným delením lupu by im za to určite nestáli. Pomôžte Montymu dokázať, že počet vriec v treťom dostavníku je tiež určite prvočíslo a zabráňte tak prepadu.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Po nevydarenej lúpeži sa Krivozubý Tony nejakú dobu rozčuľoval, no časom z neho hnev vyprchal. Rozhodol sa, že si zlepší náladu tým, že potrápi Waltyho hlavu. Dal mu nasledovnú úlohu. Na svojom tele má n jaziev. Toto číslo n je dvojciferné a navyše číslo $n^3 - n$ je deliteľné číslom 100. Montyho úloha je zistiť, koľko jaziev môže mať Tony. Zistite aj vy, ktoré čísla n vyhovujú zadaniu. Nezabudnite prísť na všetky riešenia.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Jedného večera Drzohubí vybrali vrece plné najvzácnejších lupov. Chvíľu sa v ňom prehrabovali, a potom vytiahli vzácnosť, ktorú už dávno ulúpili Divokozápadskej matematickej spoločnosti. Bol to všeobecný rovnobežník. Navyše bol nad každou zo štyroch strán rovnobežníka vztýčený štvorec (smerom von z rovnobežníka). Banditi si už dávno všimli, že stredy týchto štvorcov tvorili opäť štvorec, nech bol rovnobežník všeobecný ako len chcel. Zaujímalo by ich však, prečo to tak je. Pomôžte Montymu zapôsobiť na Drzohubých a dokážte, že stredy štyroch štvorcov vždy tvoria štvorec.

Úloha č. 6:
Netrvalo dlho a Montymu začali všetci v bande dôverovať. A tak mu povedali ich veľký plán. Chystali sa vylúpiť obrovskú galériu v New Orleans. Táto galéria má tvar konvexného n-uholníka. V galérii sú veľmi vzácne obrazy, pričom každý má veľkosť jediného bodu. Obrazy do galérie umiestňovali nasledovne. Zobrali si jeden z vrcholov n-uholníka a postupne vztýčili kolmice na všetky priamky určené stranami n-uholníka nesusednými s vybraným vrcholom. Ak niektorá z piat týchto kolmíc padla priamo na stranu n-uhoníka, tak na to miesto dali obraz (mohol to byť aj krajný bod strany). Túto procedúru postupne aplikovali na všetky vrcholy galérie. Môže sa teoreticky stať, že v tejto galérii nie sú žiadne obrazy (t.j., že všetky päty kolmíc budú mimo strán n-uholníka)?

[1] kúsky, ktoré sa líšia iba otočením, považujeme za rovnaké

Úloha č. 7:
Ďalšie ráno sa Monty potichu vyplížil zo spiaceho táboriska a vybral sa na dlhú cestu do New Orleans. Mal v pláne tam nastražiť pascu na Drzohubých a dostať ich za mreže. Rozhodol sa, že sa cestou zastaví v indiánskej osade kmeňa Geometrov a poprosí tam o pomoc svojho kamaráta Sinetua. Spoločne určite vymyslia ako banditov dolapiť. Len čo dorazil do osady, stretol miestneho geometra Rysueta, ktorý sa opäť pasoval s geometrickým problémom. Na zemi mal nakreslenú kružnicu k so stredom O. Dnu v kruhu vymedzenom kružnicou k ležal bod A a mimo tohto kruhu ležal bod B. Navyše platilo, že body A, B a O neležia na jednej priamke. Rysueto chcel nájsť všetky priesečníky priamky určenej bodmi A a B a kružnice k. Stále mal však zapatrošené svoje pravítko, a tak mal k dispozícii iba kružidlo. Do neho vie nabrať vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma narysovanými bodmi a nakresliť kružnicu s nabraným polomerom a ľubovoľným stredom. Pomôžte Rysuetovi nájsť všetky priesečníky priamky AB a kružnice k len za pomoci kružidla a vášho umu. Nezabudnite, že bez pravítka neviete rysovať rovné čiary.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Rysueto poďakoval Montymu za jeho pomoc a pokračoval vo svojom rysovaní. Monty sa vybral pohľadať Sinetua. Našiel ho ako s ďalšími indiánmi sedí pri okrúhlom stole. Sedelo ich tam dokopy 1894. Sinetu mal v hrsti n mincí. Zvyšní indiáni mali hrste prázdne. Potom sa začali hrať nasledovnú hru. V každom ťahu si vybrali jedného indiána, ktorý mal v hrsti aspoň dve mince. On potom jednu zo svojich mincí posunul indiánovi po svojej ľavici a jednu indiánovi po svojej pravici a zvyšné mince si nechal. Tým jeden ťah skončil. Takto pokračovali až kým sa medzi nimi nenachádzal žiaden, ktorý by mal aspoň dve mince. Vtedy hra skončila a šli si zabafkať na fajke mieru. Dokážte, že ak n je rovné 1894, tak ich hra nikdy neskončí. Taktiež dokážte, že ak n je menšie ako 1894, tak hra určite niekedy skončí.

Úloha č. 9:
Monty presvedčil indiánov, aby sa hru hrali iba s 1893 mincami, a tak sa už po chvíli mohol porozprávať so Sinetuom. Podelil sa s ním o svoje zážitky a vyložil mu, čo má v pláne. Sinetu ihneď súhlasil, že mu pomôže a odbehol sa zbaliť. Monty išiel zatiaľ pozrieť miestneho šamana. Ten si Montyho a jeho bystrú hlavu už dávno obľúbil, a tak mu rovno zadal jeho najnovšiu úlohu. Monty má dokázať, že pre každé prirodzené číslo n, väčšie ako jedna, existuje n rôznych prirodzených čísel spĺňajúcich nasledovnú podmienku: pre ľubovoľné dve čísla a, b z tejto n-tice platí, že $a - b$ delí $a + b$. Nebuďte mrchožrúti a dokážte to aj vy.

Úloha č. 10:
Monty sa rozlúčil so Šamanom a spolu so Sinetuom sa vydal na dlhú púť do New Orleans. Na cestu si so sebou chceli vziať všetky funkcie f, ktoré sú z reálnych čísel do reálnych a pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí nasledovný vzťah:

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y).$$

Pomôžte im a nájdite všetky takéto funkcie.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **4. november 2013** (pre zahraničie 1. november 2013)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`