Zadania 3. série letnej časti KMS 2014/2015

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Viťo bol včera loviť. Ulovil si prirodzené číslo. Je ale niečim špeciálne. Ak ho zapíšeme v sedmičkovej sústave, tak je to trojciferné číslo. Ak ho ale zapíšeme v deviatkovej sústave, získame trojciferné číslo, ktorého cifry sú v opačnom poradí, ako pri jeho zápise v sedmičkovej sústave. Aké číslo si Viťo ulovil? Uveďte jeho zápis v desiatkovej sústave.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Betka našla vo vrecku na kabáte inšpiráciu. Vymyslela tak nový jazyk - *babeliánčinu.* Je to jazyk, ktorého všetky slová sú vytvorené iba z dvojpísmenovej abecedy obsahujúcej písmená A a B. Všetky slová babeliánskeho jazyka musia spĺňať nasledujúce kritériá:

- Ak nejaké slovo babeliánskeho jazyka obsahuje písmeno B, aj slovo, ktoré vznikne nahradením tohto B za ABA, je babeliánske.
- Ak nejaké babeliánske slovo obsahuje dve A za sebou, aj slovo, ktoré vznikne nahradením týchto dvoch A za jedno B, je babeliánske.
- Ak nejaké babeliánske slovo obsahuje dve B za sebou, potom je aj slovo, ktoré vznikne vypustením týchto dvoch B, babeliánske.

Vieme, že slovo B je babeliánske. O akých slovách, ktoré majú 4 alebo menej písmen, vieme s určitosťou povedať, že ich babeliánčina obsahuje?

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Hopko išiel na túru na Chopok. Z výšky videl lúku, na ktorej bolo sedem stromov. Lúka má tvar pravidelného šesťuholníka so stranou dĺžky 100m. Ukážte, že vieme nájsť také dva stromy[1], ktorých vzdialenosť je najviac 100m.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Ketrin našla v nemeckom slovníku slovíčko trinken a jeden algebrogram. Ako správna matematička si tento algebrogram zovšeobecnila. Nájdite všetky n, pre ktoré má algebrogram $n \cdot HAUS = DORF$ riešenie. Úlohou v algebrograme je doplniť za rôzne písmená rôzne cifry (a za rovnaké písmená doplniť rovnaké cifry) tak, aby bola splnená daná rovnica. Navyše, čísla $HAUS$ a $DORF$ sa nesmú začínať na číslicu 0.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Marek letel ponad veľký mrak na lietajúcom koberci. Veľký mrak má tvar gule G s polomerom R a dotýka sa koberca (roviny P). Okrem toho sa v poblízku nachádza aj osem mráčikov (malých gúľ s navzájom rovnakým polomerom r). Každý mráčik sa dotýka koberca, veľkého mraku a dvoch susedných mráčikov. Maráčiky takto vytvárajú „golier“ okolo veľkého mraku. Vyjadrite r pomocou R.

Úloha č. 6:
Na bočnej čiare ihriska sme mali rozostavaných n kuželiek, každý meter jednu. Potom prišiel tréner a každú kuželku okrem prvej a poslednej vychýlil kolmým smerom od čiary o kladnú vzdialenosť, buď von z ihriska, alebo do ihriska. Hráč sa snaží zarovnať všetky kuželky na čiaru ihriska. Môže však robiť len nasledujúci krok: vyberie si nejakú kuželku okrem prvej a poslednej a presunie ju presne do stredu medzi jej susedné dve kuželky. Pre ktoré n existuje také počiatočné rozostavenie kuželiek, že ich vie hráč všetky po konečnom počte krokov zarovnať na čiaru[2]?

Úloha č. 7:
Baša chová na záhrade švába. Ten jej na oplátku kreslí rôzne obrázky. Naposledy nakreslil trojuholník ABC. V ostrouhlom trojuholníku ABC ležia body D, E, F na stranách BC, CA, AB (v uvedenom poradí). Vieme, že platia nasledovné rovnosti:

$$|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle BFD|$$
$$|\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle EDC|$$
$$|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle FEA|$$

Určte všetky možné veľkosti uhla ADB.

[1] predpokladajte, že stromy sú body
[2] kuželky už nemusia byť vzdialené meter od seba

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Vodka sa hral s atómami vodíka. Keď ich dal do vody, neklesli na dno. Aj niektoré čísla sú *neklesajúce* – sú to také prirodzené čísla, ktorých cifry sú v neklesajúcom poradí (v smere zľava doprava). Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje neklesajúce číslo, ktoré má n cifier a je druhou mocninou celého čísla.

Úloha č. 9:
Ľudka je vždy kľudná, keď ráta geometriu. Napríklad takúto. Bod O je stredom opísanej kružnice tupouhlého trojuholníka ABC. Priamka l je kolmá na os uhla BAC a prechádza stredom strany BC. Navyše platí, že stred úsečky AO leží na priamke l. Určte $|\sphericalangle BAC|$.

Úloha č. 10:
Miro navštívil mesto miest, Rím. V Koloseu rastú kvietky. Každý kvietok je buď snežienka, ruža, alebo tulipán. Keď ich Miro začal skúmať, všimol si nasledovné vlastnosti:

- Žiadna trojica kvietkov neleží na priamke.
- Vo vnútri každého trojuholníka s vrcholmi v snežienkach leží aspoň jedna ruža.
- Vo vútri každého trojuholníka s vrcholmi v ružiach leží aspoň jeden tulipán.
- Vo vnútri každého trojuholníka s vrcholmi v tulipánoch leží aspoň jedna snežienka.

a) Nájdite čo najmenšie prirodzené číslo N, aby vždy platilo: ak rastie n kvietkov v Koloseu, ktoré spĺňajú Mirove vlastnosti, tak potom: $N \geq n$.
b) Nájdite rozmiestnenie N kvietkov, ktoré splňuje Mirove vlastnosti (stručne vysveltite, prečo vaše rozmiestnenie spĺňa tieto vlastnosti).

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na facebookovej stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Partneri

Termín odoslania riešení: **20. apríl 2015** (pre zahraničie 17. apríl 2015)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`