Zadania 3. série zimnej časti KMS 2016/2017

Kategória ALFA

Kde bolo, tam bolo, za žiadnymi horami, za žiadnymi dolami, bolo kráľovstvo, ktoré nemalo žiadneho kráľa. V tom kráľovstve sa nachádzala tabuľka 3×3, ktorá mala na každom políčku napísanú nulu.

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
V každom políčku tabuľky 3×3 je napísané číslo 0. Jeden ťah spočíva v pripočítaní alebo odpočítaní jednotky od ľubovoľných dvoch (hranou) susedných políčok tabuľky. Je možné po niekoľkých ťahoch dostať tabuľku plnú jednotiek?

V kráľovstve sa nachádzala jedna udatná dievčina Gertrúda, ktorá sa rozhodla zachrániť kráľovstvo pred chaosom a ujať sa jeho vlády. Korunu si však musí zaslúžiť. Jej prvým záslužným činom bolo zmerať obvod kráľovstva.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Kráľovstvo sa nachádza na ostrove v tvare trojuholníka ABC, v ktorom $|AB| = 7\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|CA| = 9\,\mathrm{cm}$. Body X a Y sú postupne vnútorné body úsečiek AB a AC tak, že úsečka XY sa dotýka vpísanej kružnice trojuholníka ABC. Určte obvod kráľovstva – trojuholníka AXY.

Kráľovská klenotnica kedysi obsahovala plno pokladov. Boli medzi nimi čísla všetkých druhov. V čase anarchie ich však zbojníci pokradli a ostalo ich nula. Gertrúda našla stopu a rozhodla sa klenoty získať späť.

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Nájdite všetky trojice celých čísel (a, b, c), pre ktoré platí

$$\begin{aligned} a + bc &= 3c, \\ b + ca &= 3a, \\ c + ab &= 3b. \end{aligned}$$

Ďalší z klenotov stráži jeden z obávaných zbojníkov prezývaný Pekelník. Gertrúda za ním prišla, ale ak chce klenot získať späť, musí Pekelníka poraziť v jeho hre.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Gertrúda a Pekelník hrajú hru na šachovnici rozmerov $n \times n$. Gertrúda začína, potom sa s Pekelníkom striedajú v ťahoch. V každom svojom ťahu položí hráč na ľubovoľné voľné políčko kameň. *Voľné políčko* je také, na ktorom nie je kameň a ktorého (hranou) susedné políčka obsahujú najviac jeden kameň. Hráč, ktorý vo svojom ťahu nemôže položiť kameň, prehráva. V závislosti od prirodzeného čísla n určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.

Cestou späť Gertrúda stretla Jaroslava, najlepšieho matematika v kráľovstve, ktorý sa zaoberá štúdiom tetivových štvoruholníkov. Ako správna budúca kráľovná, ktorá sa zaujíma o svoj ľud, sa s ním pozrela na nasledujúcu úlohu.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Body K, L sú zvolené na strane AB konvexného štvoruholníka $ABCD$ tak, že bod K leží medzi bodmi A a L. Analogicky, body M, N sú na strane CD tak, že bod M leží medzi bodmi C a N. Ďalej platí $|AK| = |KN| = |DN|$ a tiež $|BL| = |BC| = |CM|$. Predpokladajme, že $BCNK$ je tetivový štvoruholník. Dokážte, že potom aj štvoruholník $ADML$ je tetivový.

Jaroslav prezradil Gertrúde rovnicu, z ktorej môže zistiť výskyt ďalších klenotov. Keď ich nájde, už kráľovstvu nebudú chýbať žiadne klenoty.

Úloha č. 6:
Pre každé nezáporné celé číslo k nájdite všetky nezáporné celé čísla x, y, z také, že

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8^k.$$

Pripraviť palác na korunováciu nie je žiadna prechádzka ružovou záhradou. V kráľovskom paláci sa nachádza plno veľkých krabíc. Aby zaberali menej miesta, bolo by dobré niektoré do seba poukladať.

Úloha č. 7:
Štvorec je rozdelený na n^2 obdĺžnikov pomocou $n-1$ zvislých a $n-1$ vodorovných úsečiek, kde $n \geq 2$ je celé číslo. Dokážte, že spomedzi nich vieme vybrať $2n$ obdĺžnikov tak, aby pre ľubovoľné dva z nich platilo, že jeden sa zmestí do druhého.[1]

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Konečne nastala korunovácia, na ktorej nechýbal žiaden obyvateľ kráľovstva. Korunovácia sa musí riadiť prísnymi predpismi. Napríklad Kráľovná stojí v strede kružnice a po jej obvode stoja piati mudrci. Ďalšie detaily sa dozviete v nasledujúcej úlohe.

Úloha č. 8:
Na kružnici so stredom O sú dané body A, B, C, D, E tak, že úsečka AB je priemer kružnice, úsečka CD je kolmá na úsečku AB a úsečka AE prechádza stredom úsečky OC. Dokážte, že úsečka DE prechádza stredom úsečky BC.

Sotva sa Gertrúda ujala vlády a už ju znepokojovalo päť rozhádaných miest v kráľovstve. Ak nechce mať vo svojom kráľovstve žiadne spory, musí mestá vhodne odseparovať.

Úloha č. 9:
Kružnicu k nazývame *separátor* množiny piatich bodov v rovine, ak prechádza tromi z daných bodov, štvrtý bod leží vo vnútri kružnice k a piaty bod mimo kružnice k. Dokážte, že každá množina piatich bodov, z ktorých žiadne tri body neležia na priamke a žiadne štyri body neležia na kružnici, má práve štyri separátory.

Kde bolo, tam bolo, za jednou horou a za jednou dolinou, bolo jedno kráľovstvo s jednou udatnou kráľovnou Gertrúdou. V tom kráľovstve sa nachádzala jedna čudesná nekonečná postupnosť.

Úloha č. 10:
Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_1 = c$,

$$a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2-1)(a_n^2-1)}$$

pre všetky prirodzené čísla n. Dokážte, že ak c je prirodzené číslo, potom každý člen postupnosti je celé číslo.

Návody a videonávody k úlohám

Po termíne série zverejňujeme na našej stránke `www.kms.sk` medzi novinkami návody k úlohám. Pomôžu vám doriešiť úlohy, s ktorými ste si nevedeli rady. Taktiež vám môžu pomôcť videonávody, ktoré nájdete na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/user/KorMatSem`.

Akadémia Trojstenu

V Bratislve sa 2. decembra uskotoční tradičná Akadémia Trostenu. Môžeš sa tešiť na zaujímavé prednášky z matematiky, fyziky a informatiky podané či už univerzitnými pedagógmi, alebo ľuďmi z praxe. Bližšie informácie nájdeš na `http://akademia.trojsten.sk/`.

Partneri

Termín odoslania riešení: **5. december 2016** (pre zahraničie 2. december 2016)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

[1]Obdĺžniky možno aj otáčať. Dva zhodné obdĺžniky sa zmestia do seba. Štvorec považujeme za špeciálny prípad obdĺžnika.