Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 42. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO).

Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený seminár *i*KS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korespondenčního semináře. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Bližšie informácie o ňom nájdete na stránke `www.iksko.org`.

Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Každá časť pozostáva z troch kôl úloh. Zadania jednotlivých kôl nájdeš na stránke `https://kms.sk/ulohy/` vždy aspoň mesiac pred termínom odovzdania daného kola. Úlohy 1 až 8 budú obodované počtom bodov od 0 po 9, úlohy 9 a 10 počtom bodov od 0 po 10. Okrem toho v niektorých špeciálnych prípadoch (popísané nižšie) môžu byť úlohy obodované aj od 0 po 5.

Body sa udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každé kolo sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel, ktoré úlohy môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient κ. Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $\kappa = r + u + c$. Číslo r je tvoj ročník, číslo u je počet tvojich úspešných semestrov a číslo c je počet tvojich úspešných účastí na celoštátnom kole Matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Tvoj ročník je prepočítavaný podľa počtu rokov do maturity tak, aby maturant mal ročník 4, teda napr. prváci 5-ročného štúdia majú ročník 0.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient κ je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci študenti. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po kole, v ktorom pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené úlohy 1 až 7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $\kappa \leq 2$. Ostatné úlohy (3 až 7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

Kategória BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené úlohy 3 až 10. Úlohu číslo 3 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 5$, ale dostanú za ňu najviac 5 bodov (popísané nižšie). Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 5$ a úlohu číslo 5 len študenti s $\kappa \leq 8$. Ostatné úlohy (6 až 10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

Riešenia za 5 bodov

Koeficient κ určuje, ktoré úlohy môže riešiteľ súťažne riešiť (ostatné úlohy môže riešiť tiež, no nebudú zarátané do výsledného poradia). Okrem toho môže riešiteľ za najviac 5 bodov riešiť nasledujúce úlohy, aj keď mu to koeficient nedovoľuje:

- úloha s najvyšším poradovým číslom, ktorú koeficient riešiteľovi nedovoľuje riešiť
- úloha číslo 4

Napríklad:

- riešiteľ s koeficientom 5 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 a 2, v úlohe 3 vie získať 5 bodov, v úlohach 4 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohach 9 a 10 vie získať po 10 bodov
- riešiteľ s koeficientom 9 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 až 3, v úlohách 4 a 5 vie získať po 5 bodov, v úlohach 6 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohach 9 a 10 vie získať po 10 bodov

Bodovanie týchto úloh funguje tak, že opravovateľ ohodnotí úlohu od 0 po 9 bodov ako zvyčajne, ale riešiteľovi sa do súčtu bodov z nej započíta len polovica bodov zaokrúhlená nahor.

Pozývanie na sústredenia

Po každej časti, zimnej aj letnej, sa uskutočnia **dve** sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 36 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci. V rámci jednej časti je možné zúčastniť sa najviac jedného sústredenia.

Pokyny pre riešiteľov

- Úlohy rieš samostatne.
- Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu, prípadne odkaz na internetovú stránku, ak si čerpal z internetu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4. Ku každej úlohe uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine, češtine a riešenia písané v TeXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Na našej stránke si môžeš stiahnuť a vytlačiť predlohy pre riešenia.
- Riešenia píš čitateľne. Ak nebudeme schopní prečítať časť tvojho riešenia, vyhradzujeme si právo neudeliť ti za tú časť body. Môžeš zvážiť písanie riešenia na počítači.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Po termíne kola môžeš na našej stránke nájsť návody, príp. aj videonávody, ktoré ti pomôžu (nesúťažne) doriešiť úlohy, s ktorými si mal/-a problém. Následne tam zverejníme aj vzorové riešenia.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia s prípadnou ďalšou korešpondenciou ti môžu byť zasielané domov, na internát alebo na inú adresu (napr. do školy). Nezabudni však v návratke uviesť presnú adresu, kam chceš dostávať poštu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr sťažnosť na e-mailovú adresu spolu s oskenovaným riešením v prílohe. Žiadosť môžeš poslať aj písomne na našu adresu, ktorú nájdeš v hlavičke letáku. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na kms@kms.sk .

Elektronické posielanie riešení

Svoje riešenia môžeš odovzdať aj v elektronickej podobe na našej stránke. Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš na stránke . Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania kola o **23:59**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú **iba riešenia vo formáte pdf** písané na počítači, prípadne naskenované, **pre každú úlohu jeden súbor**. Pri ich tvorbe odporúčame použiť TeX alebo export do formátu pdf z iných aplikácií. Môžeš pritom využiť predlohy, ktoré nájdeš na našej stránke `https://kms.sk/template`. Ak posielaš oskenované riešenie, daj si pozor, či nie je príliš tmavé a či je čitateľné.

- Nezabudni v hlavičke riešenia uviesť svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Pokiaľ na našej stránke vyplníš všetky potrebné údaje (pozri si návod na `https://kms.sk/eriesenia`), nemusíš posielať poštou papierovú návratku.

....TU ODSTRIHNI..

Prihláška do zimnej časti KMS 2020/2021 – **poslať spolu s 1. kolom!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: ....
Rok maturity: .... Trieda:..
Počet účastí na celoštátnom kole MO: ....
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – škola – iná): ....
Tel. domov: .... mobil (vlastný): ....
e-mail: ....

Svojím podpisom dávam podľa § 11 a nasl. zákona č. 122/2013 Z.z. o ochrane osobných údajov svoj výslovný súhlas so správou, spracovaním a uchovaním svojich osobných údajov, ktoré poskytujem občianskemu združeniu Trojsten. Poskytujem dobrovoľné údaje s tým, že tieto údaje môžu byť spracované pre (i) ich interné využitie v rámci občianskeho združenia Trojsten za účelom vyhodnotenia uchádzačov o program (ii) za účelom vytvárania databázy uchádzačov pre účely ďalšej spolupráce so študentom. Beriem na vedomie a súhlasím s tým, že Trojsten môže moje údaje dlhodobo uchovávať a spracúvať za účelom poskytovania študentských príležitostí alebo iných odborných alebo spoločenských aktivít občianskeho združenia Trojsten. Súhlas je daný na dobu nevyhnutnú na dosiahnutie účelu spracovania a je ho možné kedykoľvek písomne odvolať.

Podpis: ....

Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 5. 10. 2020 (pre zahraničie 2. 10. 2020)

1.1 Kotúľanie Malebných Šutríkov ($\kappa \leq 1$) kategória **alfa**

Na mramorovom námestí uprostred Atén sa chlapci, odbremenení od bežných každodenných starostí a hrozby blížiacej sa vojny, hrali tradičnú hru περιδέραιο. Hra spočívala v šikovnom vrhu farebných guľôčok po zemi na cieľ.

V koženom vrecúšku bolo pred začiatkom hry 100 guľôčok troch farieb – niektoré boli červené, iné zelené a zvyšné modré. Ako prvý bol na rade Markos, ktorý si na svoj vrh vybral 30 červených, 10 zelených a 20 modrých guľôčok. Žiaľ, počas vrhu sa mu podarilo omylom hodiť 5 guľôčok do kanálu. Zahanbený rýchlo pozbieral zvyšné guľôčky a vrátil ich späť do vrecúška. Ďalší v poradí bol Mikael. Vytiahol z vrecúška 8 červených, 18 zelených a 48 modrých guľôčok. Mikael si všimol, že Markos stratil 5 guľôčok, nevedel však narýchlo povedať, akej farby boli. Viete niečo povedať o farbe niektorých zo stratených guľôčok?

1.2 Kreslíme Malé Štvorce ($\kappa \leq 2$) kategória **alfa**

O pár blokov ďalej si študenti aténskej školy, čakajúc na svojho učiteľa, krátia čas zapisovaním prirodzených čísel v tvare súčtu dvoch druhých mocnín celých čísel. Pre 5-ku sa im to podarilo ako $2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$. Potom prišiel ich múdry učiteľ a položil im otázku: ”Je možné nájsť takéto dve celé čísla pre ľubovoľnú mocninu 10-tky?” Skúste aj vy zodpovedať túto otázku.

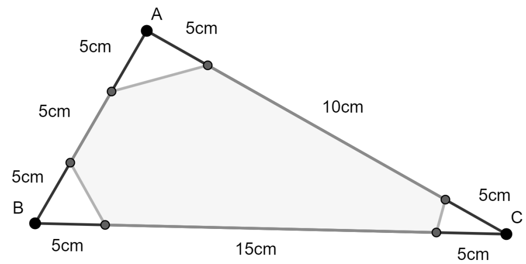
Poznámka: mocniny 10-tky sú čísla tvaru 10^k kde k je ľubovoľné prirodzené číslo.

1.3 Kalokagatia Mestskej Spoločnosti ($\kappa \leq 3$) kategórie **alfa** a **beta**

Na rozdiel od Sparty Aténski predstavitelia dbali na to, aby ich bojovníci – hopliti, mali nielen krásne vyšportované telá, ale aj bystrú a rozhľadenú myseľ. Tento ideál súladu fyzickej a duševnej krásy, nazývaný tiež Kalokagatia, bol pre Aténsku spoločnosť nesmierne dôležitý. Aj preto dávali svojim vojakom pred jedlom vždy nejakú mentálnu rozcvičku, ktorú museli vyriešiť, aby sa mohli dosýta najesť. Jedlo si museli zaslúžiť. Z dobových rytín a malieb na urnách sa nám dochoval tento príbeh:

Múdry generál Perikles raz prišiel za svojimi vojakmi, ktorí práve obedovali fazuľu s tradičným gréckym nekysnutým chlebom – pitou, ktorý bol v tvare trojuholníka so stranami dĺžok 15, 20 a 25 cm ako na obrázku. Skôr, ako sa vojak stihol do pity pustiť, prišiel za ním Perikles a ostrým nožom mu odrezal z každého rohu kúsok v tvare rovnoramenného trojuholníka s dĺžkou ramien 5 cm a povedal vojakovi: „Ak by si chcel tieto kúsky zjesť, drahý spolubojovník, budeš mi musieť najprv povedať, koľko z pity ti ostalo. Odpovieš mi však nesprávne, hodím celú pitu mačkám, ktoré už nervózne žobrú pod tvojimi nohami.“

Skúste sa teraz aj vy zamyslieť nad danou úlohou a zistite obsah plochy, ktorá vojakovi ostala. Podarí sa vám to alebo vašu porciu hodia mačkám?



1.4 Komplikované Mocenské Spory ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

V čase vojny sa často aj nemysliteľné stáva skutočnosťou. Bolo tomu tak aj v čase grécko-perzských vojen, kedy Aténčanom pod velením Temistokla prišli na pomoc v ťažení proti Peržanom aj ich úhlavní nepriatelia – Sparťania, pod velením generála Pausania. Samozrejme, že proti sile ich spojených armád nemali Peržania šancu a utrpeli pri Platajach zdrvujúcu porážku. Po vojne je však potrebné víťazstvo nielen dobre osláviť, ale si aj rozdeliť vojnovú korisť. Keďže Peržania po sebe nič nezanechali, ostávalo si už len rozdeliť znovudobyté územie.

Temistokles aj Pausanius boli obaja praktickí muži činu. Preto sa rozhodli rozdeliť si dobyté územie v tvare trojuholníka ABC čo najkonvenčnejšie. Chceli by ho rozdeliť na dve polovice, s rovnakým obsahom tak, že ho na mape prerežú jedným rezom, ktorý bude rovnobežný so stranou AB trojuholníka ABC.

K dispozícii však v tábore majú iba pravítko a kružidlo.

- Pravítko dokáže zobrať dva body a narysovať priamku vedúcu cez tieto dva body.
- Kružidlo dokáže spraviť kružnicu v nejakom bode s polomerom rovným vzdialenosti nejakých dvoch bodov.

Generáli teraz stoja pred ťažkým rozhodnutím rozrezať územie na dve rovnako veľké časti. Pomôžte im nájsť pomocou pravítka a kružidla takú priamku, ktorá je rovnobežná so stranou AB trojuholníka ABC a delí ho na dve časti s rovnakým obsahom. [1]

1.5 Kadekde Mysliteľ Škriabal ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Aristoteles raz išiel popod most v Aténach, keď tu zrazu skríkol "Heuréka!", zobral najbližší kameň a vytesal [2] do kamenného piliera sústavu rovníc

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = \alpha^2 + \beta + \gamma^2 = \alpha + \beta^2 + \gamma^2.$$

Nájdite všetky kladné reálne trojice α, β, γ, ktoré spĺňajú Aristotelovu rovnosť.

[1] Ak ste sa s podobným typom úloh ešte nestretli môže vám pomôcť krátky text na stránke: https://kms.sk/ako_riesit/konstrukcne_ulohy/

[2] Jeho akt sa nápadne podobá tomu, čo od neho nehanebne skopíroval Hamilton o 2000 rokov neskôr https://en.wikipedia.org/wiki/Broom_Bridge

1.6 Kadekto Musel Stáť

kategórie **alfa** a **beta**

Súčasťou večerného života Grékov boli aj divadelné predstavenia v amfiteátroch. Vždy pred predstavením sa pred amfiteátrom tvorili dlhé rady, no ani dĺžka radov neodradila gréckych džentlmenov od bontónu.

Do radu prišlo naraz 30 Grékov – dámy aj páni. Na začiatku každej minúty každý pán, ktorý mal hneď za sebou dámu, túto dámu pustil pred seba (vymenil sa s ňou). Dokážte, že po 30 minútach boli všetky dámy pred všetkými pánmi a to bez ohľadu na to, ako vyzeral rad na začiatku. Pánov a dám môže byť rôzny počet.

1.7 Kompletne Márny Sizyfos

kategórie **alfa** a **beta**

Po vystátí radu sa začalo divadelné predstavenie o Syzifovi. Bohovia udelili Syzifovi za trest tlačenie kameňa do kopca. V nultý deň vytlačil Syzifos kameň do nejakej výšky, no na konci dňa sa mu skotúľal o kus nadol. V prvý deň znovu vytlačil kameň do nejakej výšky a večer sa mu opäť skotúľal. Takto Syzifos pokračoval do nekonečna…

Máme danú nekonečnú postupnosť $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reálnych čísel takú, že pre každé kladné celé číslo n platí $(a_{n-1} + a_{n+1})/2 \geq a_n$. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

1.8 Kompetitívna Majestátna Súťaž

kategória **beta**

Ešte významnejším podujatím ako divadelné predstavenia boli olympijské hry. V starovekom Grécku mali však nezvyčajný systém bodovania.

Olympijských hier sa zúčastnilo $2n$ tímov. Každá (neusporiadaná) dvojica tímov hrala proti sebe práve raz. Žiaden zápas neskončil remízou. Po každom zápase dostal porazený tím 0 bodov a víťazný tím toľko bodov, koľkokrát pred tým celkovo prehral. Nájdite všetky celé čísla $n \geq 2$, pre ktoré mohli olympijské hry prebehnúť tak, aby každý tím skončil s rovnakým nenulovým počtom bodov.

1.9 Kruhy Mysliteľa Syrakúz

kategória **beta**

Jeden z rímskych vojakov vtrhol práve do domu Archimeda a našiel ho pri tom, ako do piesku kreslí matematické diagramy. Archimedes, ktorý si v pohrúžení nevšimol ani prítomnosť vojaka, na to nakoniec doplatil. Riman mu zakázal kresliť a vtedy fyzik vyslovil slávnu vetu: „Noli tangere circulos meos!“, čo v preklade znamená: „Nedotýkaj sa mojich kruhov!.“ Vraj to boli posledné slová, ktoré vyriekol pred svojou smrťou (vojak ho prebodol mečom).[3] Pri tomto známom Archimedovom výroku „Nerušte moje kruhy“ išlo o kruhy nasledovné:

V trojuholníku ABC, kde platí $|AC| < |AB| < |BC|$, ležia na stranách AB a BC postupne body K a N tak, že platí $|KA| = |AC| = |CN|$. Priamky AN a CK sa pretínajú v bode O. Bod M leží na strane AC tak, že OM je kolmé na AC. Dokážte, že kružnice vpísané trojuholníkom ABM a CBM sa dotýkajú.

[3] Zdroj: https://sk.wikipedia.org/wiki/Archimedes_zo_Syrakúz

1.10 Kontradikció Monotheism Superlatif

kategória **beta**

Nad starovekými Grékmi bdelo nespočetné množstvo bohov. Zapamätať si všetky tie ich mená je priam nemožné. Ani my si ich nepamätáme. Preto miesto mien ich budeme volať číslami. Taký Zeus, vládca Olympu, mal číslo 5, ktoré má nasledovnú zaujímavú vlastnosť. Vieme ho vyjadriť ako súčet aj súčin piatich celých čísel, ktoré sú v oboch prípadoch rovnaké $5 = 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 5 + 1 + 1 - 1 - 1$. Z toho dôvodu Zeus býval na Olympe len s bohmi, ktorí mali túto vlastnosť tiež.

Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré existuje n (nie nutne rôznych) celých čísel, ktorých súčet aj súčin je rovný n.