



Zadania 2. kola zimnej časti

Termín odoslania 2. 11. 2020 (pre zahraničie 30. 10. 2020)

2.1 Krádež Matematických Symbolov ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Nadránom vstúpil muž do budovy, nad ktorou práve doblikal neónový nápis „Danteho Detektívna Agentúra,“ sňal si z hlavy klobúk a aj so sakom ho zavesil na vešiak. Prešiel zo päť metrov a sadol si za svoj dubový stôl. Vyložil si naň nohy a zobral do rúk noviny. Hľadiac na titulnú stranu uvidel, že je zase niekto nezvestný. Danteho detektívnou agentúrou sa ozývalo: „Chalani! Vyzerá to, že máme znovu robotu!”

Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (a, b) , pre ktoré platí

$$4^a = b^2 + 7.$$

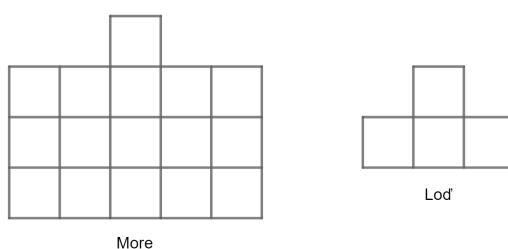
Niektu ich zase uniesol. Nájdite ich! Bleskovo!“ kričal Dante na svojich podriadených.

2.2 Koráb Mornár Strielal ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Dante pokrýval so svojou firmou okrajovú časť ekonomického záujmu. Mal za úlohu riešiť problémy, ktoré sa občas v meste vyskytli. Matematické problémy. Aj napriek nepočítnej cieľovej skupine sa mu darilo, pretože jeho zákazníci boli zámožní a dobre mu platili. Napríklad taký admirál Ulysses S. bol celkom grand. To znamená, že dobre platil. Nerád však za muníciu, preto si zavolať Danteho agentúru, aby mu vyriešila tento problém:

Na mori – pozri obrázok – sa nachádza na neznámom mieste loď tvaru T-čka – ako na obrázku – pričom však môže byť ľubovoľne otočená. „Na koľko najmenej políčok potrebujem vystreliť,“ pýtal sa admirál Ulysses S., „aby som s istotou trafil loď v mori bez ohľadu na to, kde sa nachádza? A poriadne mi aj zdôvodnite, že na menej výstrelův mi to nie vždy vyjde, nebudem tu predsa plytvať muníciou!“



2.3 Kognitívna Matematická Spoločnosť ($\kappa \leq 3$)

kategória **alfa a beta**

Nadišiel ďalší deň. Slnko svietilo nad Manhattanom 50 rokov. Dante vstúpil do svojej agentúry, sňal si z hlavy klobúk a aj so sakom ho zavesil na vešiak. Prešiel zo päť metrov a sadol si za svoj dubový stôl. Vyložil si naň nohy a z vrečka vytiahol niekoľko po sebe idúcich kladných celých čísel takých, že ich súčet bol 1000. Koľko ich mohlo byť najviac?

2.4 Kasíno, Moc a Sláva ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Keď Danteho nebavilo riešiť problémy iných, tak si vyrazil do lokálneho kasína oškľbať niekoho o peniaze. Dnes bola v ponuke takáto hra:

Dvaja hráči – jeden naľavo a jeden napravo – hrajú hru. Pre potreby hry je na stole vyložených 2020 červených, 2020 zelených a 2020 modrých žetónov. Začína hráč napravo od žetónov, ktoré sú uprostred stola. Potom sa hráči striedajú v ťahoch. V jednom svojom ťahu si hráč zoberie zo stola aspoň jeden žetón, avšak nesmie si zobrať viac ako jeden žetón rovnakej farby. Vyhráva ten hráč, ktorý zoberie úplne posledný žetón zo stredy stola. Kam si má Dante sadnúť, aby mal proti svojmu súperovi víťaznú stratégiu? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

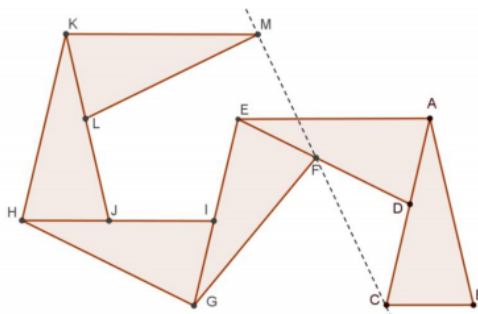
Poznámka: Víťazná stratégia znamená, že hráč vie voliť také ťahy, aby vyhral bez ohľadu na to, aké ťahy vykonáva jeho súper.

2.5 Korporácii Modeluj Symbol ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Ráno sa Dantemu ťažko vstávalo do roboty. Veď aby nie, keď to včera prehnal s oslavami svojho veľkolepého víťazstva v kasíne. Preto keď mu ráno prišla ďalšia ponuka, delegoval ju na svojich podriadených – teda na vás. Chcelo sa mu spať.

„Vážený pán Dante, naše firemné logo je zložené zo šiestich zhodných rovnoramenných trojuholníkov, ktoré sú umiestnené tak ako na obrázku, ktorý Vám v prílohe posielame. Naše logo však môže byť dokonalé len ak body M , F , C ležia na jednej priamke. Zistite nám, prosím, či body M , F , C ležia na jednej priamke. Musí to nevyhnutne platiť bez ohľadu na pomer dĺžok strán rovnoramenných trojuholníkov? Svoje tvrdenie zdôvodnite.“



2.6 Komplikovaná Mordovačka Strelcov

kategórie **alfa** a **beta**

Dante sa už-už chcel prevaliť na druhý bok, keď mu zazvonil telefón. „Mačka spadla do vírivky. Nasoľ chechtáky. Dnes v noci v Central Parku,“ zavrčal hlas jeho partnera Krumpľa. Dante zavrčal a zložil.

V tú noc sa chystala prestrelka medzi všetkými gangami v Central Parku a Dante to neplánoval nechať tak. V časoch detektíva Danteho si Hippies presadili svoje a Central Park bol prerobený do tvaru nekonečnej štvorčekovej siete, kde uprostred každého vrchola stál strom – považujeme ho za bod. Všetci členovia gangov – dokopy 2020 členov – sa rozostavili po sieti. Každý si chce vybrať jeden strom, zoťať ho a postaviť sa na jeho peň. Keďže však nikto nechce, aby mu nepriatelia – alebo hoci aj priatelia – zmizli z dohľadu, chcú sa rozostaviť tak, aby úsečka spájajúca ľubovoľných dvoch gangsterov neprechádzala žiadnym stromom ani pňom s iným gangstrom. Dante sa poškríabal na hlave a zamyslel sa: existuje vôbec také rozostavenie? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

2.7 Kupuj Muníciu Symetricky

kategórie **alfa** a **beta**

Dante si pobavene odplul a vyrazil z domu. Pred prestrelkou je iste potrebné si kúpiť kokosáky do bambitky. Zohol sa a prešiel cez skrytý podchod medzi dvoma *avenues*. „Sevas, Jerry, starý krokodíl,“ zavrčal, keď naňho spoza špinavých dverí vykukol nie menej špinavý chlap. „Poď ďalej a nasol si klobásku,“ uškrnul sa Jerry a vstúpil do obchodu. Dante si chce kúpiť náboje do dvoch bambitiek. Náboje skladuje vo veľkých štvorcoch, preto by bol rád, keby aj počty nábojov boli štvorcami prirodzených čísel. Dante má rád poriadok, preto by rád kúpil oboch typov krabičiek rovnaký počet. Zaujímalo by ho však, aké má možnosti.

Nájdite všetky kladné celé čísla n , pre ktoré sú obe čísla $12n - 119$ a $75n - 539$ druhými mocninami celých čísel (nie nutne rovnakých).

2.8 Kulprit Musí Sedieť

kategória **beta**

Dante nakúpil náboje a pristúpil k Jerryemu. „Dočuj, prisámvačku, občas sa mi marí, že máš za pultom zašmodrchaného nejakého gan-“ V tú ranu spoza pultu vyskočil vysoký uhol a vyrazil na ulicu. Dante sa obrátil na podpätku a v zlomku sekundy ho dolapil. „Počuj, nie si ty ten uhol, čo vykradol Banku pána Bambulu na siedmej avenue?“ Uhol sa však len krútil a volal, že chce právnika. Dante si teda posunul klobúk hlbšie do čela a pustil sa do detektívovania. Je načim dokázať, že tento uhol a tamten uhol sú jeden a ten istý uhol.

Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán BC , AC , AB postupne v bodoch D , E , F . Úsečka AD pretína kružnicu vpísanú trojuholníku ABC druhý raz v bode Q . Priamka p je rovnobežná s priamkou BC a prechádza cez bod A . Priamky DF a DE pretínajú priamku p postupne v bodoch P a R . Dokážte, že uhly PQR a FQE majú rovnakú veľkosť.

2.9 Križuj Mimomestské Spoje

kategória **beta**

Dante nemal čas vyplňať súdne dokumenty, lebo ho čakala nočná nasálačka. Revolver mal pripravený na najhoršie a jeho kokosáky ho ťažili v kapsách. Ako kráčal ulicou, zniesol sa pred neho muž s mechanickými krídlami a vyhrkol: „Dante! Štváč Ernest sa dozvedel, že sa ho dnes v noci chystáme čapnúť! Zobral melanž a zdrhol lietadlom!“ „Tak to teda nie,“ zavrčal Dante. „Kúp si lístky, Watson, lebo nasadáme... *do biznis triedy*.“

Štváč Ernest uteká pred 62 policajtm, ktorí ho prenasledujú po leteckej sieti USA. V USA je 2020 letísk, pričom medzi niektorými dvojicami letísk sú obojsmerné letecké spojenia. Každé spojenie spája práve dve letiská a medzi každými dvoma letiskami sa dá prepraviť využitím najviac dvoch leteckých spojov.

Počas prvého dňa sa 62 policajtov ľubovoľne rozmiestni po letiskách v USA, kľudne aj viacerí na to isté letisko. Potom cez prvú noc na niektoré letisko pricestuje Štváč Ernest, podľa svojej voľby. Po celý čas (teda už aj v prvú noc) majú Ernest aj prenasledovatelia informácie o polohách všetkých zúčastnených. Každý deň sa môže (ale aj nemusí) každý prenasledovateľ presunúť pomocou jedného leteckého spojenia z jeho letiska do nejakého iného letiska. Každú noc sa môže (ale nemusí) Štváč Ernest presunúť na iné letisko pomocou jedného leteckého spojenia. Ak sa nejaký policajt nachádza na letisku naraz so Štváčom Ernestom (je jedno či cez deň alebo v noci), Štváč Ernest je okamžite zatknutý. Dokážu policajti zatknúť Štváča Ernesta bez ohľadu na jeho stratégiu cestovania a bez ohľadu na to, ako vyzerajú letecké spojenia medzi letiskami v USA?

2.10 Konečný Masaker Sezóny

kategória **beta**

Dante sa už-už chcel pustiť za Štváčom Ernestom, ale vtom mu opäť zazvonil telefón. „Šéfinšpektor Kulinoha!“ zasalutoval reflexívne Dante, keď sa ozval familiárny hlas. „Nechajte Štváča Ernesta môjmu okrsku a sústreďte sa na dnešnú prestrelku gangov,“ nariadil Kulinoha. „Rozkaz,“ uškrnul sa Dante a zložil. Dnes bude tá noc, na ktorú celý život čakal. Keď sa zotmelo, zobral svoje bambitky a prišiel do Central Parku. S nabitými pištoľkami sa opatrne zakrádal tmou, keď zrazu o niečo zakopol. Pozrel na čudsný objekt na zemi a prekvapením mu padla sánka. Bola to trojposchodová torta s marcipánovými sviečkami a priloženou kartičkou. Na kartičke stálo: „Detektívovi Dantemu. Ospravedľňujeme sa, že meškáme, ale všetci sme dostali mykózu na nohách a musíme zostať doma liečiť sa. Ako kompenzáciu vám prikladáme aspoň malú hádanku. Podpísané: Gangy New Yorku.“ A na druhej strane kartičky svietila hádanka:

Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla a, b platí

$$f(a) + f(a + f(b)) = b + f(f(a) + f(f(b))).$$