Trojsten

Korešpondenčný matematický seminár
XLII. ročník, 2020/2021
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 3. kola zimnej časti

Termín odoslania 30. 11. 2020 (pre zahraničie 27. 11. 2020)

3.1 Koniec Matfyzného Štúdia ($\kappa \leq 1$) — kategória **alfa**

Po tom ako Kubko krvopotne dokončil štúdium na MatFyze, rozhodol sa vybrať sa na dovolenku do Japonska. A veru, že sa aj vybral. Cestovnou kanceláriou, ktorá mala takéto pekné logo. Jeden by povedal, že by sa z neho dala spraviť aj pekná úloha...

Je daný pravidelný[1] šesťuholník $ABCDEF$ s obsahom 1 cm^2. Priamky CD a EF sa pretnú v bode G. Nájdite obsah trojuholníkov ABG a BCG.

3.2 Kocky Mihom Skladáme ($\kappa \leq 2$) — kategória **alfa**

Počas letu do Tokia si Kubko našiel kamaráta menom Rjoiči. Cesta ale bola dlhá, a preto, keď leteli nad Kazachstanom, navrhol Rjoiči, aby si zahrali hru kocky a vytiahol 2020 kociek (nie nutne rôznych veľkostí), z ktorých každá bola zlepená z nejakého počtu (možno aj jednej) malých kocôčiek s dĺžkou hrany 1 cm. Kubko skôr, ako sa s nimi začali hrať, zistil, že ich dokáže poukladať tak, že z nich poskladá jednu veľkú kocku, ktorej hrana má dĺžku n cm. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu n, pre ktorú táto situácia mohla nastať.

3.3 Kruhový Magický Symbol ($\kappa \leq 3$) — kategória **alfa** a **beta**

Keď Kubko pristál v Tokiu, bol ohúrený. Všade okolo videl pokémonov, a to dokonca aj takých, o ktorých ani samotný Jožo nepočul. Nedávny rozmach pokémonov dospel až do štádia, keď pre každé kladné celé číslo existoval práve jeden pokémon. Dokonca, sa medzi pokémonmi rozmohol špeciálny druh evolúcie, v ktorom sa z dvoch pokémonov stane jeden nový. V starom chráme našiel Kubko o tejto evolúcii nasledovné zápisky:

1. $a \otimes a = a + 2$,
2. $a \otimes b = b \otimes a$,
3. $\dfrac{a \otimes (a+b)}{a \otimes b} = \dfrac{a+b}{b}$.

Rozlúštil, že $a \otimes b$ značí číslo pokémona, ktorého dostaneme spojením pokémonov s číslami a, b. V zápiskoch sa teda píše:

1. Keď spojíme dvoch pokémonov s rovnakým číslom, výsledkom je pokémon s číslom o 2 väčším.
2. Pri spájaní dvoch pokémonov nezáleží na poradí, v ktorom ich spájame.
3. Pre ľubovoľné kladné celé čísla a, b platí: Ak zoberieme číslo pokémona vzniknutého spojením pokémonov s číslami a, $a + b$ a vydelíme ho číslom pokémona vzniknutého spokením pokémonov a, b, dostaneme rovnaké (racionálne) číslo ako $(a + b)/b$.

Pokémona s akým číslom dostaneme, ak spojíme pokémonov Wartortle (číslo 8) a Charmeleon (číslo 5)?

[1] všetky strany sú rovnaké a všetky uhly sú rovnaké

3.4 Kvitne Mi Sakura ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

V druhý deň svojho pobytu sa Kubko vybral do Osaky navštíviť ten povestný hrad, ktorý zohrával dôležitú rolu pri zjednotení Japonska v šestnástom storočí. Hneď na prvý pohľad ho upútali prekrásne sakurové záhrady črtajúce sa pod hradbami mohutného hradu, ako aj rovnostranné vlajky klanu Tojotomi. Práve tieto vlajky nás inšpirovali k ďalšej úlohe. Veríme, že sa vám bude páčiť.

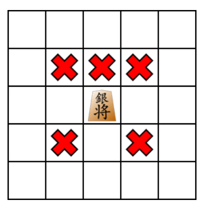
Je daný rovnostranný trojuholník ABC. Na strane AB leží bod D, rôzny od bodov A, B. Na polpriamke opačnej k polpriamke AC leží bod E tak, že $|BD| = |AE|$. Dokážte, že $|DE| = |DC|$.

3.5 Kultový Miestny Šach ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Počas prehliadky hradu zvnútra sa Kubko trochu nechal strhnúť krásou fresiek na stenách a pútavými slovami sprievodkyne. Najviac ho však zaujalo, keď sprievodkyňa začala rozprávať o japonskom šachu, ktorý hrávali japonskí Šogúni a Daimjóvia.

V japonskej verzii šachu existuje figúrka strieborného generála, ktorá vie byť otočená jedným zo štyroch základných smerov. Strieborný generál ohrozuje políčka, ktoré s ním susedia diagonálne a jedno políčko pred sebou (podľa toho, ktorým smerom je otočený). Koľko najviac figúrok Strieborných generálov je možné umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby žiadna figúrka strieborného generála neohrozovala inú figúrku?



3.6 Konsky Mätúca Stránka

kategórie **alfa** a **beta**

Na hoteli Kubka ako nového učiteľa čakala prvá prednáška tohto školského roku. Dištančné vzdelávanie je však sviňa. Keď sa Kubko snažil nakresliť zadanie geometrickej úlohy na jednej internetovej stránke, ktorá poskytuje zdieľanú tabuľu, zistil, že to nie je žiadna sranda. Kružnice sa tam kreslia vážne blbo. A ešte k tomu vpísať trojuholníku kružnicu? No nazdar!

Aplikácia dovoľuje robiť nasledovné kroky:

1. Vyznačiť bod v rovine, na priamke, na kružnici, na priesečníku dvoch útvarov alebo dotykový bod.

2. Vyznačiť dva body a narysovať nimi priamku.

3. Vyznačiť dva body K, L a jednu z dvoch polrovín určenej priamkou KL a narysovať kružnicu, ktorá je vpísaná do štvorca so stranou KL, ktorý sa nachádza vo vyznačenej polrovine. (V tomto kroku sa narysuje len kružnica, štvorec sa nenarysuje.)

Vie pomocou uvedených krokov vpísať Kubko do trojuholníka ABC kružnicu, a to bez ohľadu na voľby bodov A, B, C?

3.7 Kvalitný Mimoriadny Sejf

kategórie **alfa** a **beta**

Kubka mrzelo, že počas prvej online prednášky sa rozprával len s čiernym monitorom, lebo študenti sa rozhodli nezapnúť kamery na svojich počítačoch. Rozhodol sa preto si prečistiť hlavu večernou prechádzkou po vychýrenej železničnej stanici Šindžuku. Sadol si na lavičku a sledoval odchádzajúce vlaky. Zrazu sa vedľa neho ktosi vrhol na lavičku a začal nadávať. Kubko sa neznámeho perfektnou angličtinou opýtal, v čom je problém. „Tu na Šindžuku si človek môže uschovať cennosti do skriniek na zámok," vysvetlil neznámy. „Ale ja som svoj kľúčik stratil a musím zodpovedať bezpečnostnú otázku, aby mi zamestnanci skrinku odomkli. A keďže som ultra hlúpy, dal som si ako hádanku matematickú úlohu a zabudol som jej riešenie." Kubko ho s potešením ubezpečil, že to nebude najmenší problém.

Cudzincova hádanka znie nasledovne: Dá sa pre každú dvojicu nenulových racionálnych čísiel (a, b) nájsť dvojica prirodzených čísiel m, n takých, že $(am + b)^2 + (a + nb)^2$ je prirodzené číslo?

3.8 Konečnú Misku Schlamstnem!

kategória **beta**

„Vďaka za pomoc, ja som Jótaró Hamata," vystrel ku Kubkovi človek ruku na znak vďaky. „Pozývam vás na misku alebo dve horúceho oyakodonu." Keď zapadli do ošumelej krčmičky pod stanicou, vysvitlo, že tých misiek nebude len jedna či dve.

Na stole je viac ako n^2 misiek, kde n je kladné celé číslo. Kubko sa s Jótaróm rozhodol zahrať si hru o to, kto vychlípe poslednú misku so šťavnatou rybou. Ako prvý bude chlípať Kubko a následne sa s Jótaróm striedajú v ťahoch. Hráč na ťahu musí vychlípať m misiek, pričom m spĺňa jednu z nasledovných podmienok:

- $m = 1$.
- $1 < m < n$ a zároveň m je prvočíslo.
- m je násobkom čísla n.

Vyhráva ten, kto vychlípe špeciálnu poslednú misku[2] so šťavnatou rybou. Dokážte, že Kubko má víťaznú stratégiu.

[2] Podľa dávnej tradície však túto misku je možné vychlípať až ako poslednú, zo všetkých na stole. Preto sa tiež volá posledná miska.

3.9 Komplikáciu Má Shinji

kategória **beta**

Keď dojedli, spokojne sa opreli vo svojich isu a uvoľnili si opasky. „Dočuj," povedal Jótaró. „Pomohol by si mi ešte s jedným problémom? Ak mi dáš pomocnú ruku, za odmenu ti prezradím zmysel života." Kubko poomáľal jeho ponuku na jazyku a nakoniec prikývol.

Sadli teda do Jótarovho auta a odviezli sa do akejsi podzemnej futuristickej základne. Všade monitory, herné konzoly, počítače, autá Nissan a hlavne rad obrovských robotov. „Problém je v tom, že nevieme dostať Shinjiho do robota," vysvetlil Jótaró. „On je totiž trošku divný a má takú podmienku, ktorú treba splniť, aby vstúpil do robota. Ja by som chcel vedieť, ktoré z týchto robotov podmienke vyhovujú. Tiež mi rovno pomôž niečo Shinjimu dokázať."

Roboty sú číslované zaradom 1, 2, 3…. Shinji si vymyslel špeciálnu funkciu $f(x)$, ktorá zoberie binárny zápis[3] čísla x, vymení všetky jednotky za nuly a naopak, a prevedie výsledok do desiatkového zápisu, čo je jej funkčná hodnota pre x. Napríklad $f(23) = 8$, lebo $23 = 10111_2$, teda $f(23) = 01000_2 = 8_{10}$. Shinji potrebuje, aby ste dokázali, že pre každé kladné celé n platí nerovnosť

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq \frac{n^2}{4}$$

Dokážte, že Shinjiho nerovnosť platí pre každé kladné celé číslo n, a následne zistite, pre ktoré n platí rovnosť.

3.10 Kóan Mysteriózneho Spoločníka

kategória **beta**

Kubko, byvší tou matematickou legendou, za ktorú ho všetci považujú, úlohu vyriešil ľavou prednou. Jótaró Hamata uznanlivo pokýval hlavou a vydali sa späť do Tokia. Sadli do Jótarovho auta a vyrazili. Jótaró chvíľu šoféroval mlčky a potom sa opýtal: „Bude ti vadiť, keď si pustím hudbu? Pri šoférovaní ma upokojuje." Kubko pokýval hlavou, že mu to v najmenšom neprekáža. Jótaró vybral z náprsného vrecka kazetu a vložil ju do obstarožného prehrávača. Autom sa rozľahli teplé tóny niekoho menom Takaši Jošimacu (ako Jótaró Kubkovi vysvetlil). O pol minúty na to auto zastalo a kazeta stíchla. Stáli pred Kubkovým hotelom. Nebo bolo plné hviezd, ktoré žiaľ kvôli svetelnému smogu nebolo vidieť, a noc voňala tajomstvom. Jótaró sa oprel a úplne zbytočne zašepkal: „Sme na mieste." Kubko prikývol a zahľadel sa na obzor. Spoločne mlčali. Jótaró napokon pootvoril ústa a potichu, ako keď kladiete niekoho srdcu blízkeho do postele, pošepkal: „To, čo ti teraz poviem, ti možno príde kryptické. Ale verím, že raz si uvedomíš plnú dôležitosť mojich slov a vtedy si na mňa spomenieš." Kubko nevedel, čo odpovedať, tak mlčal. Jótaró trochu bubnoval prstami po volante a napokon Kubkovi prezradil zmysel života, prezradil mu ho v otázke, ktorá Kubka mátala až do rána, a potom aj počas celého letu späť domov a ktovie ako dlho ešte:

„Existuje nekonečne veľa kladných celých čísel n, pre ktoré je číslo $(2020n)!$ deliteľné číslom $n! + 1$?"

[3] binárny zápis je postupnosť 0 a 1 začínajúca 1 okrem prípadu, kedy $f(x) = 0$