



Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 1. 3. 2021 (pre zahraničie 26. 2. 2021)

1.1 Komunálny Marlboroughský Sheriff ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Nad mestom sa vznášal prach. A predsa bolo vidieť šerifskú hviezdu nad vchodom do úradu Sgt. Peppera. Ak niekto americké Marlborough držal na krátko a prinášal do všedných dní vraždenia, krvi a krčmových duelov poriadok, tak to bol on. Muž činu a legenda, Sheriff Sgt. Pepper. Ale zase nepreháňajme. Nie každý deň bolo treba volať hrobára. Napríklad včera jediným problémom, ktorý Sgt. Pepper riešil, bol nejaký rodinný spor o delbe majetku:

13-členná rodina mala v banke po zosnulom strýcovi majetok v neznámej hodnote. Pamätali si však, že tá hodnota bola tvaru $44\dots43$, pričom 3-ke predchádzalo $n \geq 1$ štvoriek. Akú hodnotu mohol mať majetok, aby si ho vedeli rozdeliť bezo zvyšku? Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že vyššie uvedené číslo je deliteľné 13 bezo zvyšku.

1.2 Komančská Malba v Sene ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

„Ser Pepper!“ kričal zadychčaný muž texaským dialektom, „Komančovia sa vrátili! V noci do našich úrodných polí vypálili znak. Musíte nám pomôcť.“ Sgt. Pepper neváhal. Povedal jeho povestné „Idem, riešim,“ nasadol na koňa a vybral sa za kovbojom. Až dorazili na miesto činu, odkryl sa im takýto obraz:

Vo vnútri pravidelného 80-uholníka je vyznačených 50 bodov tak, že žiadna trojica zo všetkých 130 bodov (vrcholov a vyznačených bodov) neleží na jednej priamke. 80-uholník rozdelíme na trojuholníky (ktoré sa nepretínajú), pričom vrcholy týchto trojuholníkov tvoria práve vrcholy 80-uholníka a vyznačené body v jeho vnútri. Na koľko najmenej a koľko najviac trojuholníkov vieme takto rozdeliť náš 80-uholník?

1.3 Komanč Mocný Sysel' ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa a beta**

„Buď pozdravený, muž zákona,“ vyšlo z úst náčelníka Komančov Mocného Sysla počas toho, ako Sgt. Peppera obklúčili ale dva tucty Indiánov. „Ďakujem Ti, že si reagoval na našu výzvu v poli a prišiel sem. Pokrvný brat musí pokrvnému bratovi pomôcť. Naša jednotka včera zajala 47 zlatokopov a moji náčelníci si potrebujú rozdeliť ich skalpy.“

Komanči majú 47 skalpov. Piati náčelníci – Tuarego, Pacahuti, Winnetou, Apasuke a Komanke – si chcú tieto skalpy rozdeliť, pričom Tuarego aj Pacahuti chce párny počet skalpov (aj 0 je párne číslo) a Winnetou, Apasuke a Komanke chcú nepárny počet. Koľkými spôsobmi si vedia náčelníci skalpy medzi sebou rozdeliť? Skalpy sú nerozlišiteľné, čiže dva spôsoby považujeme za rôzne, ak aspoň jeden náčelník má v nich rôzne počty skalpov.

1.4 Koža Mojej Šije ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

„No počkať, čože ste to vy? Zajali 47 dobrých Američanov? Tak to teda nie!“ zazneli posledné slová z úst Sgt. Peppera skôr, ako ho Indiáni ovalili tomahavkom a zviazaného hodili do típi. Keď sa Sheriff Pepper prebral, vydesil ho pošahaný muž, ktorý si kreslil na zem obrázky. Chcel vedieť, koľko kože mu ostane, až ho tí divosi oskalpujú...

V štvoruholníku $ABCD$ označíme K, L, M, N postupne stredy strán AB, BC, CD, DA . Platí, že

$$|AL| = |AM| = |BM| = |BN| = |CN| = |CK| = |DK| = 47.$$

Dokážte, že aj $|DL| = 47$.

1.5 Kaderník Ma Skalpuje ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Keď sa začalo stmievať, vošiel do típi náčelník Mocný Sysel v doprovide dvoch Indiánov. Medzitým, ako Indiáni odťahovali druhého muža k lokálnemu barberovi, prehovoril náčelník k marlboroughskému šerifovi: „Sgt. Pepper, v minulosti sme si boli ako bratia a mnohokrát si nám pomohol. Že si to ty, dovolím ti si teraz vybrať pravouhlý trojuholník kože, ktorý ti za trest oskalpujeme. Samozrejme odtiaľ-potiaľ, musíš sa držať nejakých pravidiel.“ Medzitým sa už vrátili naspäť Indiáni a hodili na zem zvitok s ponukou lokálneho kaderníctva. V zvitku stálo:

Z hlavy ti vytrhneme pravouhlý trojuholník kože, ktorý má odvesny s celočíselnými dĺžkami. Navyše platí, že číselné vyjadrenie jeho obsahu a obvodu je rovnaké. Pomôžte Sgt. Pepperovi nájsť všetky takéto trojuholníky, nech si môže lepšie vybrať svoj účes podľa najnovšej módy.

1.6 Kravy Marlboroughské Sledujem

kategórie **alfa** a **beta**

Nad mestom sa vznášal prach. A predsa bolo vidieť šerifskú hviezdu nad vchodom do úradu Sgt. Peppera. Ak niekto americké Marlborough držal na krátko a prinášal do všedných dní vraždenia, krvi a krčmových duelov poriadok, tak to bol on. Muž činu a legenda, Sheriff Sgt. Pepper. Ale zase nepreháňajme. Nie každý deň bolo treba volať hrobára. Napríklad dnes jediným problémom, ktorý Sgt. Pepper riešil, bolo hľadanie strateného dobytká¹ statkára Ritza:

Nájdite všetky prirodzené čísla n , pre ktoré existuje n **nie nutne rôznych** prvočísel p_1, p_2, \dots, p_n , pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} p_1 &| p_2^2 - 1, \\ p_2 &| p_3^2 - 1, \\ &\vdots \\ p_{n-1} &| p_n^2 - 1, \\ p_n &| p_1^2 - 1. \end{aligned}$$

Poznámka. Zápis $a | b$ čítame „ a delí b “ a znamená, že existuje celé číslo k také, že $a \cdot k = b$, čiže číslo b je deliteľné číslom a .²

¹ Pekne očíslovaného vypáleným prirodzeným číslom n .

² Keď sa zaoberáme celými číslami a nie len prirodzenými, tak aj $0 | 0$, keďže $0 \cdot 1 = 0$.

1.7 Kasíno, Moc a Slama

kategórie **alfa** a **beta**

Keď Sgt. Peppera nebavilo riešiť problémy iných, tak si vyrazil do lokálneho kasína oškľbať niekoho o peniaze. Toho dňa, kedy našiel stratený dobytok statkára Ritza, bola v ponuke takáto hra:

Na stole máme karty s hodnotami od 1 po 13 v nejakom poradí. Postupne ťaháme karty z balíčka a ukladáme na kôpky. Kôpky musia byť rastúce (novú kartu môžeme položiť len na kartu s menším číslom) a kartu ukladáme vždy na kôpku s najvyšším možným číslom, lícom nahor. Ak taká kôpka neexistuje, vytvoríme novú. Keď vyložíme všetky karty, dáme kôpky na seba (postupne od najnovšej na spodku po najstaršiu na vrchu), otočíme (čím získame opäť balíček kariet, ktoré sú lícom nadol) a hráme znovu.

Kasíno vehementne hlásilo, že dá 100\$ tomu, komu sa podarí nájsť také poradie kariet, ktoré sa týmto spôsobom usporiadať nedajú. Dokážte, že také poradie neexistuje a karty sa po niekoľkých opakovaníach vždy usporiadajú.

1.8 Komančská Malba v Stene

kategória **beta**

„Ser Pepper!“ kričal zadychčaný muž texaským dialektom, „Komančovia sa vrátili! V noci³ do našich úrodných polí doniesli obrovskú stenu, a do nej vypálili znak. Musíte nám pomôcť.“ Sgt. Pepper neváhal. Povedal jeho povestné „Idem, riešim,“ nasadol na koňa a vybral sa za kovbojom. Až dorazili na miesto činu a prisvietili si svojimi fackami, odkryl sa im takýto obraz:

Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník, pre ktorý platí $|DA| < |AB| = |BC| < |CD|$. Body E a F sú postupne zvolené na stranách CD a AB tak, že priamky BE a AC sú na seba kolmé a priamky EF a BC sú rovnobežné. Dokážte, že $|FB| = |FD|$.

1.9 Kapitán Mocný Sysel

kategória **beta**

„Buď pozdravený, muž zákona!“ vyšlo z úst náčelníka Komančov Mocného Sysla počas toho, ako Sgt. Peppera obklúčili ale dva tucty Indiánov. „Ďakujem Ti, že si reagoval na našu výzvu v poli a prišiel sem. Pokrvný brat musí pokrvnému bratovi pomôcť. Naša jednotka včera znovu zajala 47 zlatokopov a moji náčelníci si potrebujú rozdeliť ich skalpy. Ale o to nejde. To už vedia. To si nám už včera vysvetlil. Iné potrebujeme. Vyriešiť takúto úlohu by sa hodilo. Že načo nám to je? Hááá, do toho ťa nič nie je!“

Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $abc \geq 1$. Dokážte, že

$$a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c.$$

³Čiže teraz, lebo teraz bola noc.

1.10 Kúzlo Mága Šuma

kategória **beta**

Keď prišiel Sheriff Sgt. Pepper spolu s Mocným Sysľom do indiánskej osady, zbadal komančského šamana, známeho Bieleho Šuma, ako so svojim šarmantným Bizónom predvádza kúzlo. Na začiatku Biely Šum odíde z javiska. Bizón uloží na stôl do radu $k \geq 2$ identických kariet, bielych z oboch strán. Následne Bizón zavolá dobrovoľníka z publika a požiada ho, aby na každú kartu napísal číslo od 1 do 2021 vrátane. Čísla sa môžu aj opakovať. Bizón potom všetky karty otočí číslom nadol až na jednu kartu, ktorú ponechá číslom nahor. Poradie kariet meniť nesmie. Potom sa vráti na scénu šaman Biely Šum a pozrie sa na karty na stole. Následne ukáže na jednu kartu a povie číslo, ktoré sa nachádza na jej spodnej strane. Nakoniec kartu víťazoslávne otočí a zožne obrovský potlesk, keďže sa to číslo na karte naozaj nachádza.

Určte najmenšie celé číslo $k \geq 2$, pre ktoré si šaman Biely Šum vie so svojim Bizónom dohodnúť stratégiu, ktorá im zaručí úspešný priebeh kúzla.