



Zadania 2. kola letnej časti

Termín odoslania 29. 3. 2021 (pre zahraničie 26. 3. 2021)

2.1 Konkretizátor Matrodej Skresáva ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Bolo štvrtého januára, keď sme dorazili ku Bránam Abstrakcie. Teda, buď bolo štvrtého januára, alebo štyritisíceho dodekatóbra, keďže náš kalendár podľahol Abstrakcii ako prvý, a okrem toho sa ani nedalo hovoriť o Bránach – skôr o Nenápadných Dvierkach V Stene Za Ohybom Rieky, Ledva Vysokých Pre Urasteného Školáka. Ani sme sa nenamáhali rozložiť stany, keďže sme vedeli, čo sa s niečím tak zložitým stane po vystavení Abstrakcii, a rovno sme sa pokúsili Dvere otvoriť. Na to potreboval Matrodej Lambzduch uplatniť svoj Konkretizátor, žiaľ, prístroj mu pred očami začal obrastať dokonalými geometrickými útvarmi a Lambzduch musel narychlo zisťovať, kde končí Konkretizátor a kde začína akési euklidovské čudo.

V lichobežníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, platí $|AB| = 2 \cdot |CD|$. Označme K, L postupne stredy strán BC, CD . Vypočítajte obsah trojuholníka AKL , ak obsah $ABCD$ je 12.

2.2 Krutitruľa Morí Smäd ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Po skonkretizovaní sa dvere otvorili a my sme vstúpili dnu. Žiaľ, neviem slovami opísať kráľovstvo Abstrakcie. Bolo veľké, asi, a celé akoby dokrkvané. To nehovorím o ošúchaných stenách, ale o zakrivenom časopriestore. Počet rozmerov sa nedal vyjadriť číslom, ale iba písmenkou. Pred očami nám tancovali obory hodnôt rôznych funkcií a multidimenzionálne dvanásťsteny. Vydali sme sa pokrútenou cestičkou a snažili sme sa vnímať toho čo najmenej, aby nám nevybuchli mozgy. Žiaľ, Abstrakcia začala pôsobiť aj na nás. Keď Krutitruľa vytiahol krabičky džúsu, zhrozene zakrútil ušami. Počet krabičiek sa stal arbitrárnym, a aby sme neumreli od smädu, museli sme ho rýchlo skonkretizovať na niečo rozumné. Konkretizovanie je však ošemetná záležitosť aj s potrebným vybavením, keďže nikdy neviete, aká podmienka alebo pravidlo na vás vyskočí.

Krutitruľa mal nejaké prirodzené číslo a . Nepáčilo sa mu, tak v ňom poprehadzoval cifry, čím vzniklo číslo b . Rozdiel $a - b = 111\dots 1$ pozostáva iba z cifier 1. Koľko najmenej jednotiek môže číslo a obsahovať?

2.3 Kráľ Mastí Scestovaného ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa a beta**

Napili sme sa a opäť vyrazili na cestu. Po čase t sa však Jubilár Bangle začal sťažovať, že vraj mu Matrodej šliape na päty, tak sme dali Jubilára na posledné miesto v zástupe, nech nás nebrzdí. Po chvíli však opäť vrieskal, že mu niekto šliape na päty. Otočili sme sa a zhrozene sme sledovali, ako na Jubilára zaútočil hrozivý všeobecný trojuholník, kráľ dvojrozmerných planárnych útvarov. Zahnať ho môže iba rýchly dôkaz.

Máme ostrouhlý trojuholník ABC . Označme E, F postupne päty výšok na strany BC a AC . Nech M, N sú postupne stredy úsečiek BE, AF . Cez bod M vedieme priamku p kolmú na AC a cez N priamku q kolmú na BC . Priesečník p a q označíme P . Dokážte, že P je stredom úsečky EF .

2.4 Ktorého Moreplavca Splatit? ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Konečne (ale, ako povedal ešte vždy otrasený Jubilár, vraj neohraničene) sme dorazili na dno Doliny Algebry. Ňou tečie Červená rieka, ktorá nás určite dovedie do Srdca Abstrakcie! Aby sme si však ušetrili cestu, rozhodli sme sa najat' si plť aj s pltiarom. Našťastie, pltiarstvo je zamestnanie každého prirodzeného čísla, nie všetky sú ale dôveryhodné. Krutitruľa si našťastie spomenul, podľa čoho spoznať toho najlepšieho pltiara.

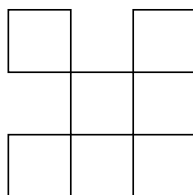
Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že posledných 5 cifier čísla n^2 je 00001. Číslo n nemôže začínať nulou.

2.5 Kuše Ma Strelia! ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Plavba bola pohodlná a my sme rýchlo zaspali. Keď však z oblohy zostúpil Stefan-Boltzmannov zákon a namiesto neho sa tam vyhupli Fresnelove rovnice, Jubilár opatrne vstal a šplach! do vody. Preplával na breh Červenej rieky, kde ho čakal zástup Legendrových polynómov vyzbrojených kušami, a ukázal im prstom na našu bezbrannú plť. Polynómy sa zaškerili (teda asi, ja som práve spal, čiže som ich nevidel) a vypustili smrtiacu salvu šípov. Keďže však chcú šetriť muníciou, nakreslili si najskôr plánik toho úseku rieky a zamierili iba na také miesta, aby si boli isté, že našu plť trafia.

Máme prázdnu tabuľku veľkosti 7×7 štvorčekov. Koľko najmenej políčok musíme vyfarbiť na čierne, aby v tabuľke nebolo 5 prázdnych políčok, ktoré tvoria diagonály štvorca 3×3 (ako na obrázku)?



2.6 Krepčíme Mihom Šípky

kategórie **alfa** a **beta**

„Jubilár, ty chrbtobodajúci chrchel!“ zareval som na breh, keď nás zobudila salva šípov. Žiaľ, jeden šíp sa počas letu zabstrahoval na Navier-Stokesove rovnice, ktoré pokrkvli bezbranného Matrodeja ako prázdnu plechovku od gumidžúsu a ešte s ním šmarili niekoľko kilometrov proti prúdu. Videl som, ako mu pri tom vypadol z vrecka Konkretizátor a padol do vody. Schmatol som Krutitruľa za rukáv a vrhol som sa do Červenej rieky, aby som Konkretizátor vylovil, no ako som padal, hladina rieky sa zákerne zabstrahovala na akýsi štvoruholník a ja som musel bleskovo uvažovať.

V štvoruholníku $ABCD$ platí $|AD| = |AB| + |CD|$. Osi uhlov BAD a ADC sa pretínajú v bode P . Dokážte, že platí $|BP| = |CP|$.

2.7 Klameme Mocným Strážcom

kategórie **alfa** a **beta**

„Urghhhhh,“ zakloktala mi v hrdle voda, ako som sa s Krutitruľom v jednej ruke a Konkretizátorom v druhej škriabal na opačný breh od Jubilára. „Toto nesmieme stratiť,“ zamával som prístrojom pred papuľou priateľa. „Táto vecička ako jediná dokáže zničiť Srdce Abstrakcie.“ „Tak sa mi vidí, že sme tak či onak došli,“ skonštatoval Krutitruľo. „Hlúposť, len prejdeme cez tamtie brány a sme v Citadele. Srdce Abstrakcie je v strede mesta. Uvidíš, zvládneme to.“ Lenže pred bránami nás čakal zástup vojakov a my sme sa museli napochytre zamaskovať. Hanbím sa za to, čo som urobil – obrátil som batériu v Konkretizátore a zabstrahoval som seba a Krutitruľa na dve reálne čísla. Potom už stačilo dokázať strážcom, že spolu nebudeme zaberat' v Citadele priveľa miesta.

Pre reálne čísla a, b platí

$$a^{2020} + b^{2020} = a^{2022} + b^{2022}.$$

Dokážte, že platí $a + b \leq 2$.

2.8 Kustódi Maraudéra Stíhajú

kategória **beta**

Vo vnútri Citadely nás čakalo niekoľko prekvapení. To prvé bolo, že vo vnútri Citadely sa nachádzalo celé kráľovstvo Abstrakcie, v plnej veľkosti a sláve. Druhé (ako nás upozornil strážnik House-Dorf) bolo, že vnútro Citadely je nekonečne veľké – presnejšie povedané, je to celá rovina. A tretie bolo, že všetky domy v Citadele stáli na bodoch s celočíselnými súradnicami, a na každom bode s celočíselnými súradnicami stál jeden dom. Chceli sme sa vydať na cestu, no House-Dorf nás najprv požiadal o pomoc: V Citadele vraj práve z basy ušiel nebezpečný zločinec. Basa sa nachádza na celočíselných súradniciach (x_0, y_0) a zločinec si najskôr zvolil nejaké celé čísla a, b a potom sa každý deň presúva tak, že ak bol ráno na súradniciach (x, y) , tak večer bude v bode $(x + a, y + b)$ ¹. Každú noc takto zločinec trávi v nejakom dome. Strážnici si každú noc vyberú jeden dom a vykonajú v ňom prehliadku.² Vedia strážnici vždy dolapit' zločinca v konečnom počte krokov, aj keď nepoznajú x_0, y_0, a, b ?

2.9 k -čka Mečmi Sekajú

kategória **beta**

Vybrali sme sa po Hilbertovej štreke smerom do stredu Citadely. Prekročili sme živý plot a putovali sme mnoho dní, len aby sme sa opäť ocitli pred hradbami Citadely. Chcel som zaťat' zuby a pokračovať v ceste, no Krutitruľo poklepal strážnika pred bránou po pleci a opýtal sa ho, kde je Kráľ Abstrakcie. Strážnik sa zaškeril a poznamenal, že kráľ sa chystá na vojnu a nemá čas riešiť chudákov. Krutitruľo toho holobriadka prehol na kolene a láskavo mu vysvetlil, že je svetoznámy stratég a kráľovi rád poskytne svoje služby. Tak sme sa ocitli v kráľovskej sále situovanej uprostred hrubých hradieb Citadely, kde nám štúply mužiček vysvetlil, že proti nemu naraz vyrazili všetky prirodzené čísla a každé si najalo svoju armádu množín, a on sa obáva, či bude vedieť svojich nepriateľov spočítat'.

Dokážte, že pre akékoľvek kladné celé číslo k existuje iba konečne veľa n -tíc po dvoch rôznych prvočísel p_1, p_2, \dots, p_n takých, že $(p_1 + k)(p_2 + k) \dots (p_n + k)$ je deliteľné $p_1 p_2 \dots p_n$.

¹Zločinec si mohol vybrať aj čísla $a = b = 0$, kedy by vlastne ostal v base.

²Pri prehliadke domu vedia zistiť len to, či sa v ňom zločinec nachádza v tú jednu noc.

2.10 Kodifikácia Multivesmíru Súčasnosti

kategória **beta**

Kráľ schmatol meč a vyhrnul sa von z dverí. Krutitruľo sa obrátil a zakričal na mňa: „Pozri, tam je napísané: „Tajná chodba do Srdca Abstrakcie“!“ Žiaľ, viac povedať nemohol, lebo vojaci v miestnosti sa zabstrahovali na Lieove grupy a jeden za druhým si naňho políhali, až z neho ostal len mastný flak. „Za ním!“ zakričal za mnou niekto a mne nebolo treba dva razy hovoriť. Vklízol som do dverí, na ktoré ukazoval Krutitruľo, a uháňal som krútiacou sa chodbičkou. Pod mojimi nohami sa otriasali rovnice tuhosti, pri každej zákrute sa sušili nepotrebné dimenzie, ako zábradlia mi slúžili geometricky dokonalé rovnobežky. Konečne som vybehol spoza rohu a ocitol som sa v čudesnej miestnosti s nekonečným povrchom, no len asi dvadsiatimi kubíkmi objemu. Uprostred na podstavci sálalo bledomodré svetlo z obrovského diamantu. Počul som za sebou v diaľke kroky, tak som rýchlo zašmátral po Konkretizátore – a nahmatal som len vzduch. Niekde mi musel vypadnúť z vrecka. Oblial ma pot. Čo teraz? Kroky sa blížili. Prizrel som sa Srdcu lepšie. Bolo nádherné. Jeho povrch sa víril a zakrúcal v slabučkých vzduchových prúdoch, takže vyzeralo, akoby bolo vytesané z dymu. Jeho žiara nebola centralizovaná, ale pochádzala z miliárd malilinkých bodiek... Naklonil som sa bližšie. Galaxie sa mi pred očami krútili, uprostred každej čierna diera. Obzrel som sa po komôrke. Po stenách boli namaľované všemožné fyzikálne a matematické zákony. Všetky smerovali k Srdcu. Komôrka nebola tvarovaná Srdcom – Srdce bolo tvarované komôrkou, a všetkým ostatným v Abstrakcii takisto. Kroky boli pár metrov za mnou. Vykročil som do Srdca. Jedna z jeho galaxií sa volá Mliečna cesta. Tam niekde je môj domov.

Ale ešte predtým som prehodil zopár znamienok, aby Fermatova veta v našom vesmíre platila. A nechal som vo fabrike časopriestoru vpísanú jednu úlohu, len pre vás:

Máme trojuholník ABC , v ktorom $|AC| \neq |BC|$. Kružnica jemu vpísaná má stred v bode I a dotýka sa strán BC , CA , AB postupne v bodoch D , E , F . Stred strany AB je M . Kolmica z bodu I na ťažnicu CM sa pretína s priamkou DE v bode K . Dokážte, že CK a AB sú rovnobežné.