Zadania 3. kola letnej časti

Termín odoslania 26. 4. 2021 (pre zahraničie 23. 4. 2021)

3.1 Knižôčka Mantavého Spolupracovníka ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Veronika chystá palacinkovú párty pre KMS vedúcich. Matúš prišiel skôr, aby jej pomohol. Je ale tak nešikovný, že ho Veronika posadila do kresla a hodila po ňom zbierku úloh, nech sa chlapec zabáva. Matúša zaujala táto úloha:

Majme kladné celé čísla a, b a c. Dokážte, že ak súčet týchto čísel nie je deliteľný číslom 3, tak musí byť číslo $(a-b)(b-c)(c-a)$ deliteľné číslom 3.

3.2 Kokos, Matúš, Stlstneš ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Pre každého vedúceho treba nachystať tanier s dvoma palacinkami. Veronika má nachystaných 25 okrúhlych tanierov usporiadaných do štvorca s piatimi riadkami a piatimi stĺpcami. Na začiatku sú všetky taniere prázdne. Veronika spraví naraz dve palacinky a položí ich na dva susedné taniere (na každý tanier jednu). Občas príde Matúš a zje po jednej palacinke z dvoch susedných tanierov. Ak bude Matúš spolupracovať s Veronikou, môže sa im podariť nachystať na každý tanier práve dve palacinky? Dva taniere považujeme za susedné práve vtedy, keď sú v tom istom riadku alebo stĺpci vedľa seba.

3.3 Krása Matematickej Symetrie ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa** a **beta**

Všimli ste si, že Aňa je palindróm? Aňa si to všimla a všetkým vedúcim to s radosťou oznámila, keď prišla na párty. Vedúcich to neohúrilo. Avšak inšpirovalo ich to a začali zisťovať, koľko je 6-ciferných palindrómov (nezačínajúcich nulou), ktoré sú deliteľné číslom 7. Zistite to aj vy.

Poznámka: Palindróm je číslo, ktoré keď prečítame odzadu (teda cifry sú v opačnom poradí), tak je zhodné s pôvodným číslom. Napríklad číslo 1578751 je 7-ciferný palindróm.

3.4 Kubo Mešká Strápený ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Kubo na párty meškal a zjavne prišiel absolútne nevyspatý. Lucy sa na neho utrápene pozrela a spýtala sa, čo ho trápi. Kubo akoby naspamäť odverklíkoval:

Máme trojuholník ABC a v ňom bod P. Označme postupne D, E a F stredy úsečiek AP, BP a CP. Ďalej označme R priesečník úsečiek AE a BD, označme S priesečník úsečiek BF a CE a označme T priesečník úsečiek CD a AF. Akú časť z obsahu trojuholníka ABC tvorí šesťuholník $DRESFT$?

3.5 Konvergencia Mysle Števkinej ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Števka horlivo natierala palacinky malinovým lekvárom. Všimla si, že na jednu palacinku nepoužije celú lyžicu lekváru, a tak sa začala zamýšľať nad desatinnými číslami. Jej myseľ dokonvergovala až k takejto úlohe:

Symbolom $\{x\}$ označíme desatinnú časť reálneho čísla x. Pokiaľ si označíme $\lfloor x \rfloor$ najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje x, tak možno desatinnú časť čísla x definovať ako $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Koľko existuje kladných reálnych čísel $x \leq 2021$, pre ktoré platí $x \cdot \{x\} = 17$?

3.6 Krtko Modeluje Systémy

kategórie **alfa** a **beta**

Krtko sa hral s tabuľkou, pretože vedel, že tabuľka je relácia a relácie sú veľmi dôležité v databázových systémoch. Síce táto úloha veľmi s databázami nesúvisí, ale zdala sa mu pekná, tak sa o ňu s vami podelil.

Máme tabuľku 10×10, v ktorej sú v nejakom poradí čísla od 1 do 100, každé práve raz. V jednom ťahu môžeme vymeniť ľubovoľné dve (nie nutne susediace) čísla kdekoľvek v tabuľke. Dokážte, že za najviac 35 ťahov sa vieme dostať do stavu, kedy je súčet každých dvoch hranou susedných čísel zložené číslo (t. j. nie prvočíslo ani číslo 1).

3.7 Kecy o Mojovi na Sústredení

kategórie **alfa** a **beta**

Pamätáte si ešte, ako sme vám na sústredeniach vždy hovorili, že príde Mojo a bude Náboj? Hádam hej, veď to už celkom zľudovelo. Skúsme to teraz trochu pozmeniť. Namiesto Náboja budeme mať nekonečne veľa konečných postupností núl a jednotiek, ktoré označíme $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Začneme s $a_1 = 0$. Príde Mojo a postupne bude vytvárať ďalšie členy tejto postupnosti, a to tak, že si na papier napíše poslednú zatiaľ vytvorenú postupnosť, a_i, dvakrát za sebou, ale keď ju bude písať druhýkrát, tak namiesto núl bude písať jednotky a namiesto jednotiek nuly. Takto dostane postupnosť a_{i+1} a tak isto postupuje ďalej. Prvé štyri členy teda budú

$$a_1 = 0,\ a_2 = 01,\ a_3 = 0110,\ a_4 = 01101001.$$

Keď Mojo bude opakovať tento proces donekonečna, dostane postupnosť $a = 0110100110010110\ldots$ Dokážte, že desatinné číslo $0.a$ nie je racionálne.[1]

Poznámka: Zápis $0.a$ znamená, že nalepíme a ako desatinnú časť čísla za 0.

3.8 Krtko a Malý Snár

kategória **beta**

Adam mal snár. V snári boli odpovede. Odpovedali na otázky. Na otázky typu „Aký význam má to, čo sa mi práve snívalo?“ Krtko mal sen. Snívalo sa mu o trojuholníku. Trojuholník však v snári nebol. Preto bol Krtko smutný, keď mu Adam povedal: „Prepáč Krtko, teraz budeš smutný, lebo trojuholník v mojom snári nie je.“ A tak bol Krtko smutný. Ale nemusel by byť. Pomôžte vyriešiť Krtkov sen, aby bol šťastný.

Je daný trojuholník ABC s bodom E na strane BC tak, že $|BE| > |EC|$. Zostrojte[2] body D a F postupne na stranách AB a AC tak, aby uhol DEF bol pravý a zároveň aby úsečka DE delila úsečku BF na polovicu.

[1] https://sk.wikipedia.org/wiki/Racionálne_č%C3%ADslo

[2] Ak ste sa s podobným typom úloh ešte nestretli, môže vám pomôcť krátky text na stránke: https://kms.sk/ako_riesit/konstrukcne_ulohy/

3.9 Koriander, Majoránka, Škorica

kategória **beta**

Nech $n \geq 1$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú kladné reálne čísla, ktoré pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$ spĺňajú nerovnosť $a_k \geq a_{k-1} + 1$. Dokážte, že

$$1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2 - a_0}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

3.10 Kategória Mocných Symbolov

kategória **beta**

Racionálne číslo r nazvývame *mocné a powerful*, ak ho vieme vyjadriť v tvare

$$\frac{p^k}{q}$$

pre nejaké nesúdeliteľné kladné celé čísla p, q a nejaké celé číslo $k > 1$. Nech a, b, c sú kladné racionálne čísla, pre ktoré platí $abc = 1$. Predpokladajme, že existujú kladné celé čísla x, y, z také, že $a^x + b^y + c^z$ je celé číslo. Dokážte, že každé z čísel a, b, c je mocné a powerful.