Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 43. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO).

Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený seminár *i*KS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korespondenčního semináře. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Bližšie informácie o ňom nájdete na stránke `www.iksko.org`.

Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Každá časť pozostáva z troch kôl úloh. Zadania jednotlivých kôl nájdeš na stránke `https://kms.sk/ulohy/` vždy aspoň mesiac pred termínom odovzdania daného kola. Úlohy 1 až 8 budú obodované počtom bodov od 0 po 9, úlohy 9 a 10 počtom bodov od 0 po 10. Okrem toho v niektorých špeciálnych prípadoch (popísané nižšie) môžu byť úlohy obodované aj od 0 po 5.

Body sa udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každé kolo sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel, ktoré úlohy môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient κ. Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $\kappa = r + u + c$. Číslo r je tvoj ročník, číslo u je počet tvojich úspešných semestrov a číslo c je počet tvojich úspešných účastí na celoštátnom kole Matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Tvoj ročník je prepočítavaný podľa počtu rokov do maturity tak, aby maturant mal ročník 4, teda napr. prváci 5-ročného štúdia majú ročník 0.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient κ je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci študenti. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po kole, v ktorom pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené úlohy 1 až 7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $\kappa \leq 2$. Ostatné úlohy (3 až 7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

Kategória BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené úlohy 3 až 10. Úlohu číslo 3 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 5$, ale dostanú za ňu najviac 5 bodov (popísané nižšie). Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 5$ a úlohu číslo 5 len študenti s $\kappa \leq 8$. Ostatné úlohy (6 až 10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

Riešenia za 5 bodov

Koeficient κ určuje, ktoré úlohy môže riešiteľ súťažne riešiť (ostatné úlohy môže riešiť tiež, no nebudú zarátané do výsledného poradia). Okrem toho môže riešiteľ za najviac 5 bodov riešiť nasledujúce úlohy, aj keď mu to koeficient nedovoľuje:

- úloha s najvyšším poradovým číslom, ktorú koeficient riešiteľovi nedovoľuje riešiť
- úloha číslo 4

Napríklad:

- riešiteľ s koeficientom 5 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 a 2, v úlohe 3 vie získať 5 bodov, v úlohach 4 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohach 9 a 10 vie získať po 10 bodov
- riešiteľ s koeficientom 9 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 až 3, v úlohách 4 a 5 vie získať po 5 bodov, v úlohach 6 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohach 9 a 10 vie získať po 10 bodov

Bodovanie týchto úloh funguje tak, že opravovateľ ohodnotí úlohu od 0 po 9 bodov ako zvyčajne, ale riešiteľovi sa do súčtu bodov z nej započíta len polovica bodov zaokrúhlená nahor.

Pozývanie na sústredenia

Po každej časti, zimnej aj letnej, sa uskutočnia **dve** sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 36 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci. V rámci jednej časti je možné zúčastniť sa najviac jedného sústredenia.

Pokyny pre riešiteľov

- Úlohy rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu, prípadne odkaz na internetovú stránku, ak si čerpal z internetu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Odporúčame Ti pozrieť stránku Ako riešiť úlohy v KMS na adrese `www.kms.sk/ako_riesit/`, kde nájdeš niekoľko užitočných rád.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia poštou z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4. Ku každej úlohe uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine, češtine a riešenia písané v TEXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Na našej stránke `www.kms.sk/template` si môžeš stiahnuť a vytlačiť predlohy pre riešenia.
- Riešenia píš čitateľne. Ak nebudeme schopní prečítať časť tvojho riešenia, vyhradzujeme si právo neudeliť ti za tú časť body. Môžeš zvážiť písanie riešenia na počítači.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia s prípadnou ďalšou korešpondenciou ti môžu byť zasielané domov, na internát alebo na inú adresu (napr. do školy). Nezabudni však v návratke uviesť presnú adresu, kam chceš dostávať poštu.
- Po termíne kola môžeš na našej stránke nájsť návody, príp. aj videonávody, ktoré ti pomôžu (nesúťažne) doriešiť úlohy, s ktorými si mal/-a problém. Následne tam zverejníme aj vzorové riešenia.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr sťažnosť na e-mailovú adresu `kms@kms.sk` spolu s oskenovaným riešením v prílohe. Žiadosť môžeš poslať aj písomne na našu adresu, ktorú nájdeš v hlavičke letáku. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`.

Elektronické posielanie riešení

Svoje riešenia môžeš odovzdať aj v elektronickej podobe na našej stránke. Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš na stránke `www.kms.sk/eriesenia`. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania kola o **23:59**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú **iba riešenia vo formáte pdf** písané na počítači, prípadne naskenované, **pre každú úlohu jeden súbor**. Pri ich tvorbe odporúčame použiť TEX alebo export do formátu pdf z iných aplikácií. Môžeš pritom využiť predlohy, ktoré nájdeš na našej stránke `www.kms.sk/template`. Ak posielaš oskenované riešenie, daj si pozor, či nie je príliš tmavé a či je čitateľné.

- Nezabudni v hlavičke riešenia uviesť svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Pokiaľ na našej stránke vyplníš všetky potrebné údaje (pozri si návod na `www.kms.sk/eriesenia`), nemusíš posielať poštou papierovú návratku.

. . . . TU ODSTRIHNI . . . .

Prihláška do zimnej časti KMS 2021/2022 – **poslať spolu s 1. kolom!**

Meno a priezvisko: . . . . Dátum narodenia: . . . .
Škola: . . . .
Rok maturity: . . . . Trieda: . . . .
Počet účastí na celoštátnom kole MO: . . . .
Adresa domov: . . . .
Adresa pre poštu (domov – škola – iná): . . . .
Tel. domov: . . . . mobil (vlastný): . . . .
e-mail: . . . .

Svojím podpisom dávam podľa § 11 a nasl. zákona č. 122/2013 Z.z. o ochrane osobných údajov svoj výslovný súhlas so správou, spracovaním a uchovaním svojich osobných údajov, ktoré poskytujem občianskemu združeniu Trojsten. Poskytujem dobrovoľné údaje s tým, že tieto údaje môžu byť spracované pre (i) ich interné využitie v rámci občianskeho združenia Trojsten za účelom vyhodnotenia uchádzačov o program (ii) za účelom vytvárania databázy uchádzačov pre účely ďalšej spolupráce so študentom. Beriem na vedomie a súhlasím s tým, že Trojsten môže moje údaje dlhodobo uchovávať a spracúvať za účelom poskytovania študentských príležitostí alebo iných odborných alebo spoločenských aktivít občianskeho združenia Trojsten. Súhlas je daný na dobu nevyhnutnú na dosiahnutie účelu spracovania a je ho možné kedykoľvek písomne odvolať.

Podpis: . . . .

Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 4. 10. 2021 (pre zahraničie 1. 10. 2021)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

1.1 Kde Mám Snúbenicu ($\kappa \leq 1$) — kategória **alfa**

Tarzan stojí na vrchole stromu vysokého 24 m. Chce sa dostať za svojou snúbenicou Jane na vrchol stromu, ktorý je vysoký 20 m. Pne týchto stromov sú vzdialené od seba 24 m a niekde medzi týmito dvoma stromami stojí tretí, z ktorého vo výške 28 m vychádza liana. Túto lianu drží Tarzan na svojom strome a chcel by sa zhupnúť ku Jane tak, aby sa po liane nemusel šplhať hore ani dolu. V akej vzdialenosti musí byť peň prostredného stromu od pňa Tarzanovho stromu, aby sa to Tarzanovi podarilo?

1.2 Krásnu Máme Svadbu ($\kappa \leq 2$) — kategória **alfa**

Tarzan a snúbenica sa vybrali za kanianskou veštícou, aby im poradila so svadbou. Tá im povedala, že ich svadba bude krásna, len ak bude spĺňať veľmi špeciálne podmienky. O počte hostí (h), počte chodov (c) a počte svadobných darov (d) musí platiť:

$$h + c + d = 47,$$

$$h \cdot c = d,$$

pričom všetky tri čísla sú kladné a celé. Nájdite všetky možné hodnoty $(h,\ c,\ d)$ tak, aby Tarzan a snúbenica mali krásnu svadbu.

1.3 KaPor Medzipolia Spája ($\kappa \leq 3$) — kategórie **alfa** a **beta**

Po krásnej svadbe nasleduje návšteva katastrálneho portálu (KaPor), aby novomanželia úspešne spojili svoje majetky. Tarzan má v rovine pole v tvare rovnostranného trojuholníka s obsahom S_1 a Jane pole v tvare rovnostranného trojuholníka s obsahom S_2. Skonštruujte pomocou pravítka a kružidla[1] pole v tvare rovnostranného trojuholníka, ktorého obsah bude $S_1 + S_2$.

1.4 Keď Motyka Strelí ($\kappa \leq 5$) — kategórie **alfa** a **beta**

Každý môže súťažiť, no nie každý môže pracovať na poli. Tarzan so snúbenicou potrebovali okopať novovzniknuté pole, no prihlásilo sa im až priveľa algebraikov.

Pre pochybenie úradov má pole tvar štvorčekovej mriežky $n \times n$, kde $n \geq 2$. Na niektorých políčkach sú algebraici, **pričom žiadni dvaja nie sú na tom istom políčku**. Každý algebraik kope motykou v jednom políčku, otočený jedným zo štyroch smerov rovnobežných so stranami poľa. Problémom je, že občas motyka vystrelí. Potom letí v smere, ktorým je algebraik otočený, až vyletí z poľa von alebo zasiahne iného algebraika. Koľko najviac algebraikov môžeme na pole umiestniť tak, aby s istotou nikto nebol zasiahnutý, keď motyka strelí? Umiestnením algebraika určujeme aj to, ktorým smerom bude otočený.

[1] Ak ste sa s podobným typom úloh ešte nestretli, môže vám pomôcť krátky text na stránke: https://kms.sk/ako_riesit/konstrukcne_ulohy/.

1.5 Krásni, Múdri, Skromní ($\kappa \leq 8$) kategórie **alfa** a **beta**

Tarzan a Jane majú deti. Každé dieťa má tri vlastnosti, krásu, múdrosť a skromnosť, a každá z vlastností má nejakú celočíselnú hodnotu. Dieťa, ktorého krása, múdrosť a skromnosť sú postupne rovné k, m a s, nazývame *poslušným*, ak jeho vlastnosti spĺňajú nasledovné podmienky:

- $k,\ m,\ s$ tvoria rastúcu aritmetickú postupnosť, teda $m - k = s - m > 0$,
- $k^2 + m^2 + s^2 = m(m - k)(s - m)$.

Nájdite všetky trojice $(k,\ m,\ s)$, ktoré môžu byť vlastnosťami poslušného dieťaťa.

1.6 Konečnosť Matriky Spochybňujem kategórie **alfa** a **beta**

Každý úradník v Kanianke je spoľahlivý alebo nespoľahlivý. Tarzan potrebuje zapísať svoje deti na matrike. Žiaľ, jemu priradený úradník je nespoľahlivý. Navyše každý úradník v Kanianke pošle svojho zákazníka za svojím najobľúbenejším kolegom. Jeden úradník môže byť najobľúbenejší pre viacero svojich kolegov. Názory úradníkov sa v čase nemenia, teda daný úradník má celý život toho istého najobľúbenejšieho kolegu. Pre každé prvočíslo p platí, že po tom, ako bol Tarzan poslaný p-krát za ďalším úradníkom, sa nachádza u spoľahlivého úradníka. Podobne pre každé kladné celé číslo n, ktoré nie je prvočíslom, platí, že po tom, ako bol Tarzan poslaný n-krát za ďalším úradníkom, sa nachádza u nespoľahlivého úradníka. Dokážte, že úradníkov v Kanianke je nekonečne veľa.

1.7 Koláče Máme Sústredné kategórie **alfa** a **beta**

Snúbenica varila obed. Povedala si, že osie hniezda znejú fajn. Osie hniezdo vyzerá ako kružnica k_1, ktorá sa nachádza vnútri kružnice k_2, pričom obe kružnice majú spoločný stred. Na kružnici k_1 ležia dva body A, B tak, že AB nie je priemerom kružnice k_1. Polpriamka AB pretína kružnicu k_2 v bode C. Dotyčnica ku kružnici k_1 v bode A a dotyčnica ku kružnici k_2 v bode C sa pretínajú v bode P. Z bodu P spravíme druhú dotyčnicu ku kružnici k_2, ktorá sa jej dotkne v bode D (kde $D \neq C$). Do kuchyne vletela osa Amoska Pichľavá, no deti jej neverili, že je skutočne osa. Dokážte, že AP je osou uhla BAD.

1.8 Kanianske Metro Spojazdnené kategória **beta**

V Kanianke sa rozhodli zaviesť metro. Každá linka má mať aspoň štyri zastávky a ľubovoľné dve linky majú mať spoločnú práve jednu zastávku. Dokážte, že pre každý taký návrh liniek možno rozdeliť zastávky na podzemné a nadzemné tak, že každá linka bude obsahovať zastávky oboch typov.

1.9 Kalkulačkou Manipulujeme Súčiny kategória **beta**

Deti našli kalkulačku. Na začiatku naťukajú do kalkulačky číslo 1. V každom kroku si náhodne vyberú jedno z čísel 3, 5, 8, 9 (každé s rovnakou pravdepodobnosťou) a vynásobia ním číslo v kalkulačke. Tento krok potom opakujú, kým sa nedostanú k číslu, ktoré po delení 13 dáva zvyšok 10 alebo 12. Tarzanko sa stavil, že tento proces skončí na zvyšku 10, Janka si zas vybrala zvyšok 12. S akou pravdepodobnosťou vyhrá Tarzanko stávku[2]?

[2] Kalkulačka nemá obmedzený počet cifier, teda dokáže zobraziť ľubovoľne veľké číslo.

1.10 Kultúrny Mirov Seminár

kategória **beta**

V kultúrnom dome v Kanianke si Miro spravil seminár o funkcionálnych rovniciach. Na začiatku seminára si z batohu víťazoslávne vytiahol papier s pripravenou funkcionálnou rovnicou. Papier sa mu však v batohu pokrčil a nebol viac rovný.

Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla a, b platí nasledujúca nerovnosť:

$$f(a)f(b) + f(ab) \leq a + b.$$