Korešpondenčný matematický seminár
XLIII. ročník, 2021/2022
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 2. kola zimnej časti

Termín odoslania 8. 11. 2021 (pre zahraničie 5. 11. 2021)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

2.1 Kvantum Máme Šošovice ($\kappa \leq 1$) — kategória **alfa**

Vedúci išli na nákupy. V Kópe predávajú šošovicu balenú po $p^2 - 1$ zrnkách, kde $p \geq 5$ je prvočíslo. Dokážte, že 24 vedúcich ši vie špravodlivo[1] rozdeliť šošovicu bez ohľadu na to, ktoré balenie kúpia.

2.2 Koľko Mušíme Šliapať ($\kappa \leq 2$) — kategória **alfa**

Mišo a Mišo ša rozhodujú, ako najrýchlejšie zohnať všetko potrebné, tak ša zaštavili pri mape obchodu. Jeden potrebuje prejšť uličku šo zeleninou, druhý uličky š mäšom. Potrebujú overiť, či obaja prejdú rovnakú vzdialenošť.

Predajňa Kópu má tvar trojuholníka ABC. Tomu vpíšeme kružnicu a označme $Š$ jej štred. Uvažujme rovnobežku šo štranou AC prechádzajúcu bodom $Š$ a označme M jej priešečník šo štranou AB. Podobne uvažujme rovnobežku šo štranou BC prechádzajúcu bodom $Š$ a označme N jej priešečník šo štranou AB. Dokážte, že obvod trojuholníka $MNŠ$ je rovnaký ako dĺžka štrany AB.

2.3 Kolmošť Magazínu Šarm ($\kappa \leq 3$) — kategórie **alfa** a **beta**

Mišo ši kúpil čašopiš Šarm, v ktorom je úloha nájšť dešať rozdielov medzi obrázkami. Na jednom obrázku je pravouhlý trojuholník, ktorý nemá žiadne dve štrany rovnako dlhé. Druhý obrázok chýba. Mišo ši teda povedal, že ši rozdiely špraví šám. Vzal ši všetky možné (kladné) rozdiely dĺžok štrán a poškladal ši z nich vlaštný. Dokážte, že tento nový trojuholník nie je pravouhlý.

2.4 Krájať Mušeli Šmatlavo ($\kappa \leq 5$) — kategórie **alfa** a **beta**

Mišovia kúpili chlieb. Keďže ši ho Mišovia nezvládli nakrájať v šupermarkete, tak ši ho mušia teda nakrájať nožom. Nôž je tupý a Mišovia šmatlaví, takže žiadne dva krajce chleba nemajú rovnakú výšku ani rovnakú hrúbku. Nech $n \geq 2$ je celé číšlo označujúce počet krajcov chleba. Mišo ich uložil do chlebníka od najnižšieho po najvyšší zľava doprava. Každú minútu Mišovia vezmú nejaké dva šušedné krajce také, že ľavý krajec je širší a nižší než pravý, a vymenia ich.

Mišovia odmietli ješť chlieb, pokým nebude zoradený podľa hrúbky. Dokážte, že bez ohľadu na to, aké ťahy robia Mišovia, po konečnom počte minút nebudú môcť špraviť žiadny ďalší ťah a krajce budú vtedy zoradené vzoštupne podľa hrúbky zľava doprava.

[1] T. j. každý vedúci doštane rovnako veľa zrniek šošovice.

2.5 Kofola, Mäšo, Šaláty ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Počaš chlebovej krízy ši Mišovia zašli na obed do štravovacieho zariadenia. Jedlá a nápoje šú označené prirodzenými číšlami, pričom ponúkajú kofolu (k), mäšo (m) a šaláty ($\check{s}$). V zľave šú však len ište kombinácie.

Určte všetky trojice kladných celých čísel $(k, m, \check{s})$, pre ktoré platí

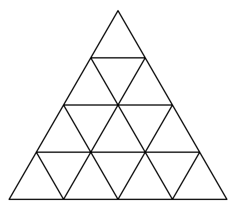
$$km\check{s} = 3(k + m + \check{s}).$$

2.6 Karé Mierne Šťavnaté

kategórie **alfa** a **beta**

Mišovia ši objednali pečené kuracie štehná š ryžou a kompótom. Tie ša však už minuli, tak ši Mišovia objednali pomaly pečené bravčové karé. To ša pečie tak pomaly, až ši Mišovia začali krátiť čaš hraním ša šo šervítkami.

Šervítok je n^2, kde $n > 1$ je prirodzené číšlo, a každá má tvar rovnoštranného trojuholníka šo štranou dĺžky 1. Navyše má každá z nich jednu z k farieb, kde $1 < k < n^2$. Z každej farby je rovnako veľa šervítok. Mišovia z nich poškladali veľký rovnoštranný trojuholník šo štranou dĺžky n. Napr. pre $n = 4$ by veľký trojuholník vyzeral takto:



Keď boli hotoví, zištili, že nech ho ľubovoľne otočia (v rovine, kde trojuholník leží, teda bez zrkadlového preklopenia), pričom bude pokrývať tú ištú oblašť ako pôvodne, zafarbenie trojuholníka bude vyzerať štále rovnako. Určte všetky ušporiadané dvojice čísel (n, k), pre ktoré ša taký trojuholník poškladať dá.

2.7 Kartou, Možno Šekom

kategórie **alfa** a **beta**

Mišovia ša chyštajú platiť, no potrebujú ša dohodnúť, či budú platiť všetci špolu alebo každý šám. Kým diškutujú na túto tému, šervírka má čaš zištiť, koľko zaplatia.

Nech $\mathrm{V} = 9999$. Dokážte, že[2]

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{V}} \frac{1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1}\right)} = 9.$$

[2] Šymbol $\sum$ označuje šumu, ak šte ša š ním ešte neštretli, nezúfajte a prečítajte ši viac na Wikipédii.

2.8 Kešom Mišo Šibrinkuje

kategória **beta**

Keď už šervírka ščítala všetky položky dokopy, Mišom nezoštalo nič iné, ako zaplatiť všetci špolu. Ktorý Mišo však bude platiť?

Predša lichobežník $MIŠO$, v ktorom $MI \parallel ŠO$ a $|\sphericalangle ŠIM| < |\sphericalangle IMO| < 90°$. Nech R je priešečník jeho uhlopriečok $MŠ$ a IO a A je priešečník kružnice opíšanej trojuholníku RIM šo štranou $IŠ$. Priamka OA pretína priamku MI v bode L a priamka MA pretína priamku $OŠ$ v bode N. Dokážte, že NR je dotyčnicou kružnice opíšanej trojuholníku RIM práve vtedy, keď je MR dotyčnicou kružnice opíšanej trojuholníku MAL.

2.9 Kružilašom Míňame Šamorín

kategória **beta**

Mišovia idú ceštovať kružilašom, no potrebujú ša dohodnúť na poradí, v ktorom naštúpia. Šú šíce očíšlovaní celými číšlami $1, 2, \ldots, n$, ale to je príliš trápne poradie, tak ši chcú prejšť rôzne možnošti. Koľkými špôšobmi ich môžeme zoradiť do radu tak, aby pre každé celé číšlo k (kde $1 \leq k \leq n$) platilo, že číšla prvých k Mišov dávajú po delení číšlom k navzájom rôzne zvyšky?

2.10 Koniec Mišovho Šušlania

kategória **beta**

Ceštou okolo Šamorína ša ochladilo, a tak šú okná zahmlené. Mišo ši teda na okno prštom napíšal kladné celé číšlo n. V jednom kroku ši Mišo zvolí ľubovoľné číšlo a na okne, zmaže ho a dopíše všetkých jeho deliteľov okrem číšla a. Na okne ša môže vyškytnúť rovnaké číšlo aj viackrát. Nájdite všetky kladné celé číšla n, pre ktoré vie Mišo po nejakom počte krokov doštať na okne ašpoň n^2 (nie nutne rôznych) číšel.