Korešpondenčný matematický seminár
XLIII. ročník, 2021/2022
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 3. kola zimnej časti

Termín odoslania 6. 12. 2021 (pre zahraničie 3. 12. 2021)
V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

3.1 Krtko Ma Štve ($\kappa \leq 1$) kategória **alfa**

Maťko našiel na svojej záhradke kôpky hliny, a preto si začal myslieť, že mu tam behá krtko. Ihneď začal premeriavať svoju trojuholníkovú záhradku a zisťovať, koľko tunelov musel krtko vykopať.

Uvažujme pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Vpíšme doň štvorec tak, aby jedna jeho strana ležala na prepone trojuholníka ABC. Jeho vrcholy ležiace na stranách BC a CA označme postupne E a F. Nech úsečka CE je dlhá 36 cm a úsečka CF je dlhá 48 cm. Vypočítajte dĺžku strany AB.

3.2 Kus Maťkovej Sústavy ($\kappa \leq 2$) kategória **alfa**

V jednej kôpke hliny našiel Maťko starý roztrhnutý kus papiera, na ktorom bola napísaná sústava rovníc. Maťko ju rýchlo išiel ukázať svojim kamarátom, ale tí mu tvrdili, že určite nemá žiadne riešenie.

Ukážte, že Maťkovi len tlačia kaleráby do hlavy a nájdite všetky dvojice reálnych čísel x, y, ktoré zároveň spĺňajú

$$4y^2 - x^2 = 2y + x,$$

$$x^2 - 2xy + 2y - x = 0.$$

3.3 Kôš Môjho Šťastia ($\kappa \leq 3$) kategórie **alfa** a **beta**

Po objavení papiera so sústavou sa Maťko snažil v jamách na záhrade nájsť aj poklad, ale neúspešne. Povedal si, že aspoň skúsi šťastie v lotérii Kôš Môjho Šťastia.

Lotéria Kôš Môjho Šťastia funguje tak, že je v koši desať loptičiek, pričom každá z nich má rovnomerne napísané čísla od 1 do 10 vrátane. Šarmantná asistentka poriadne zamieša košom, ktorý následne položí na zem. Loptičky sa usadia do jamiek a na každej padne nejaké číslo (každé s rovnakou pravdepodobnosťou). Počas posledného kola lotérie KMŠ sa ale stalo, že na prvú loptičku padol prach a nebolo na ňu vidno. Šarmantná asistentka ale povedala, že číslo na prvej loptičke bolo (ostro) menšie ako práve šesť zo zvyšných deviatich loptičiek. Iba z tejto informácie (teda za predpokladu, že neviete, čo padlo na zvyšných loptičkách), aké číslo má najväčšiu pravdepodobnosť, že padlo na prvej loptičke?

3.4 Kužele Ma Smädia ($\kappa \leq 5$) kategórie **alfa** a **beta**

Maťko úplne vysmädol a zmocnila sa ho ohromná túžba napiť sa. Zobral svoje nádoby a posnažil sa nabrať do nich čo najviac vodičky. Maťkove nádoby však majú veľmi neobvyklý tvar, takže to nebolo vôbec jednoduché.

Máme dva kužele s polomerom podstavy 3 a výškou 8. Ich osi symetrie zvierajú pravý uhol a pretínajú sa v bode, ktorý leží vnútri oboch kužeľov vo vzdialenosti 3 od základne každého kužeľu. Guľa s polomerom r leží vnútri oboch kužeľov. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu r.

3.5 Kopce Majú Stanice ($\kappa \leq 8$) kategórie **alfa** a **beta**

Maťkovi sa podarilo v Koši Môjho Šťastia vyhrať 2021 eur, a tak sa vybral na dovolenku do Vysokých Tatier. Lenže vodička taxíka zablúdila a zaviezla ho namiesto toho do pohoria Vysoké Taury. Maťko si povzdychol a povedal si, že keď tu už je, tak si aspoň pocestuje lanovkami vo Vysokých Taurách.

Vo Vyskoých Taurách sa nachádza až $n \geq 3$ staníc, medzi ktorými premávajú lanovky, medzi každou dvojicou staníc vždy najviac jedna (obojsmerná). Maťko je veľký cestovateľ, no nie až tak moc. Preto chce navštíviť len nejakú trojicu navzájom rôznych staníc A, B, C, v tomto poradí. Zistil, že nech si trojicu A, B, C vyberie ľubovoľne, vie sa medzi nimi presunúť lanovkami na najviac 2 prestupy. T. j. na ceste z A do B a z B do C využije dohromady najviac 3 lanovky (nie nutne rôzne; ak niektorú využije 2-krát, budeme to považovať za použitie dvoch lanoviek), bez ohľadu na to, ktoré stanice označí ako A, B, C. V závislosti od n určte najmenší možný počet lanoviek vo Vysokých Taurách.

3.6 Kubko, Maťko na Salaši kategórie **alfa** a **beta**

Z dovolenky sa Maťko vybral za svojím kamarátom bačom Kubkom. Kubko bol veľmi šikovný – dokázal strihať ovce, podojiť ich, zahnať ich do košiara, ale s jedným problémom si Maťko ani Kubko nevedeli rady. Pomôžte im.

Nájdite všetky kladné celé čísla a, b, c, pre ktoré platí

$$2^{a!} + 2^{b!} = c^3.$$

3.7 Kopu Mincí Sústredím kategórie **alfa** a **beta**

Za odmenu sa Kubko ponúkol, že Maťkovi navarí polievku. Avšak na nákup surovín sú potrebné peniaze, preto najskôr museli pozbierať všetky mince. A to nie len tak hocijakým spôsobom.

V rovine leží $n \geq 2$ mincí (ktoré považujeme za body). V každom kroku môžeme vziať dvojicu mincí, z ktorých jedna leží v bode A a druhá v bode B a obe ich preniesť do stredu úsečky AB. Určte, pre ktoré n sa dajú všetky mince v konečnom počte krokov presunúť do jedného bodu bez ohľadu na to, ako boli rozložené na začiatku.

3.8 Kilá Maťko Skúša

kategória **beta**

Keď boli mince vytiahnuté, išiel Maťko do obchodu kúpiť kaleráb. Aby ho nebolo málo ani veľa, vzal si so sebou sadu závaží, ale nevedel nič o ich hmotnostiach. Rád by čo najrýchlejšie našiel najľahšie a najťažšie z nich.

Maťko má 42 závaží (s kladnými reálnymi hmotnosťami), z ktorých žiadne dve nemajú rovnakú hmotnosť. Má aj rovnoramenné váhy, na ktoré dokáže umiestniť na každú stranu jedno závažie a váhy ukážu, ktoré z nich je ťažšie (nie však o koľko). Rád by zistil, ktoré z jeho závaží je najľahšie, a ktoré najťažšie. Určte najmenšie v také, že sa to Maťkovi podarí na v vážení bez ohľadu na hmotnosti jednotlivých závaží.

3.9 Králik Ma Sužuje

kategória **beta**

Po výdatnej porcii polievky sa Maťko rozhodol, že si zaobstará králika. Potreboval by však vedieť, koľko najviac jedla vie králik za jeden deň zjesť, aby vždy vedel kúpiť dostatok jedla.

Nech a, b a c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 1$. Dokážte, že platí

$$a\sqrt{a^2 + 6bc} + b\sqrt{b^2 + 6ac} + c\sqrt{c^2 + 6ab} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

3.10 Kilometrov Maťko Spravil

kategória **beta**

Maťko si predsavzal, že spraví niečo pre svoje zdravie a prejde chôdzou 30 kilometrov. Ba čo viac, nielen že ich prejde, on ich rovno zabehne! Aby však trafil do cieľa a nešiel zbytočne okľukou, bude musieť bežať rovno.

Je daný trojuholník ABC, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Stred jeho vpísanej kružnice označme I. Nech D je stred strany BC. Dotyčnica z bodu D ku vpísanej kružnici (rôzna od strany BC) sa jej dotýka v bode E. Dokážte, že DI je rovnobežné s AE.