Korešpondenčný matematický seminár
XLIII. ročník, 2021/2022
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 28. 2. 2022 (pre zahraničie 25. 2. 2022)
V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

1.1 Konštantne sa Mixujú Stúpenci ($\kappa \leq 1$) — kategória **alfa**

Ako sa tak Krtko prechádzal po T2, zrazu sa pred ním zjavil portál, ktorý ho vcucol a vypľul priamo v paláci cisára Caligulu. Ten si ho zavolal, pretože stratil prehľad o preferenciách rímskeho ľudu v gladiátorských zápasoch.

Krtko zistil, že v Ríme sú dva tímy, a to Kolosálne Matické Slizniaky a Katastrofálne Mizerné Salamandry. Oproti minulému roku 3% fanúšikov Kolosálne Matických Slizniakov prešli ku Katastrofálne Mizerným Salamandrám a 5% pôvodných fanúšikov Katastrofálne Mizerných Salamandier prešlo ku Kolosálne Matickým Slizniakom. Avšak počet fanúšikov ani jedného tímu sa oproti minulému roku nezmenil. Koľko fanúšikov má ktorý tím, ak Rím má 5 miliónov obyvateľov?

1.2 Kúpele Majú Štýl ($\kappa \leq 2$) — kategória **alfa**

Keď už bol Krtko v Ríme, tak ho Caligula poprosil, aby mu rozvrhol návrh na nové kúpele.

Majme ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Označme E pätu výšky na stranu AC, F pätu výšky na stranu AB a H priesečník týchto výšok. Ďalej uvažujme os uhla BAC a jej priesečníky s priamkami CF a BE označme postupne M a N. Dokážte, že trojuholník MNH je rovnoramenný.

1.3 Krtkov Mechanický Spreadsheet ($\kappa \leq 3$) — kategórie **alfa** a **beta**

Keď Caligula s Krtkom sedeli pri večeri, tak si Krtko smutne povzdychol, ako mu chýba počítač, že by si rád spravil spreadsheet. Na to sa Caligula podivil, že také on v živote nevidel, tak sa Krtko hneď podujal mu vysvetľovať, čo to je. Caligulu to úplne nadchlo, takže sa rozhodol, že také nutne potrebuje. Tak Krtko zapojil všetky šedé bunky mozgové a vymyslel prístroj, na ktorom je navinutý papyrus tak, aby keď sa Caligula dostane na koniec tabuľky, mu to ďalej zobrazilo začiatok tabuľky. Krtkova tabuľka má 2021 riadkov a dokáže naraz zobraziť len 90 riadkov. Teda na začiatku zobrazuje len riadky 1 až 90. Prístroj tiež obsahuje dve tlačidlá – „hore“ a „dole“ – ktorými sa vždy vie posúvať o 3 riadky hore alebo dole[1]. Ak teda na začiatku stlačí tlačidlo „hore“, bude vidieť riadky 2019 až 2021 navrchu a potom riadky 1 až 87. Caligula si náhodne zvolil dvojicu rôznych riadkov. Aká je pravdepodobnosť, že ich vie zobraziť na obrazovke naraz? Aká by bola táto pravdepodobnosť pre tabuľku s 2022 riadkami?

[1] Teda ak stlačí „hore“, navrchu sa mu zobrazia tri predtým skryté riadky a spodné tri zmiznú. Pre „dole“ naopak.

1.4 Konzul Má SPQR ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Caligula si nevedel poradiť s úlohou, tak ju zveril jeho obľúbenému konzulovi Incitatovi. Ten si s ňou ale nevie dať rady. Veď je predsa kôň! Krtko neváhal ani chvíľu a pribehol mu hneď na pomoc.

Máme 100 kartičiek s číslami od 1 do 100 (každá kartička má práve jedno číslo a každé číslo od 1 do 100 je na práve jednej kartičke). Z nich si náhodne vyberieme 48 kartičiek. Ukážte, že si vieme z týchto 48 kartičiek vybrať také dve, že ich súčet bude deliteľný 11.

1.5 Kokos, Ma Štvú ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Keď sa Caligula dopočul, že sa šíria mestom klebety, že Incitatus nebol schopný vyriešiť úlohu sám, tak ho to napajedilo, že si hneď dal zavolať obyvateľov Ríma.

Obyvatelia Ríma[2] sa postavili do radu a Caligula sa pred každého postavil a hodil si spravodlivou mincou. Ak padla hlava, tak Krtko zapísal H a obyvateľovi hlava ostala. Ak padol orol, tak si Krtko zapísal O a obyvateľa obesili. Caligula pokračoval, až pokým nemal Krtko napísanú postupnosť troch po sebe idúcich hodov H, H, O alebo O, H, O. Aká je pravdepodobnosť, že to bolo O, H, O?

1.6 Kaligulove Márnotratné Sporky

kategórie **alfa** a **beta**

Ako si Caligula hádzal mincami, tak zapatrošil všetky mince. Rozhodol sa preto zaviesť nové platidlo – Kaligulove Márnotratné Sporky.

Caligula vytvoril 10 platidiel o navzájom rôznych hodnotách $a_1, a_2, \ldots, a_{10} \in \mathbb{N}$. Navyše existuje cena $c \in \mathbb{N}$ taká, že sa nedá zaplatiť, ani ak nám predavač môže vydať.

- Dokážte, že existuje nekonečne veľa cien, ktoré sa nedajú zaplatiť, ani ak nám predavač môže vydať.
- Dokážte, že existuje hodnota $b \in \mathbb{N}$ väčšia než 1 taká, že ak ňou nahradíme ktorékoľvek jedno z existujúcich platidiel, budeme vedieť zaplatiť všetky možné celočíselné ceny, ak nám predavač môže vydať.

1.7 Kôň Maľuje Svojsky

kategórie **alfa** a **beta**

Krtkovi bolo už s Caligulom dlho, tak sa šiel prejsť s koňom Incitatom k rieke, kde kôň do piesku vyryl dáky obrazec. Krtka to natoľko uchvátilo, že si začal hneď písať.

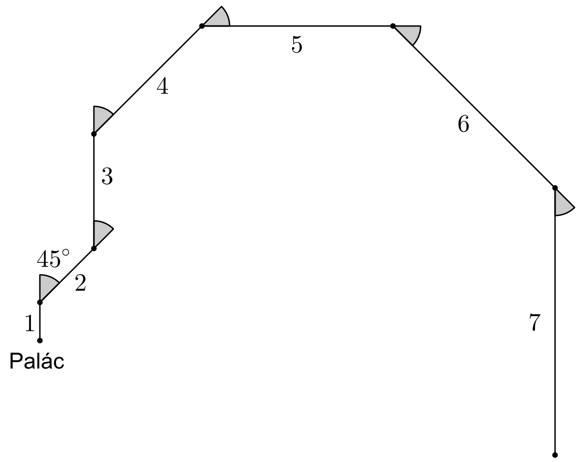
V trojuholníku ABC označme D priesečník osi uhla BAC a strany BC. Nech q je os úsečky AD. Označme priesečníky q so stranami AB, AC postupne E, F. Dokážte, že

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|CF|}{|AF|}.$$

[2] Pre potreby tejto úlohy predpokladáme, že Rím má nekonečne veľa obyvateľov.

1.8 Kroky Mnohých Štolbov
kategória **beta**

Keď Caligula zistil, že Incitatus je preč, hneď za ním poslal armádu štolbov, aby ho našli. Vedia sa vrátiť naspäť do paláca, ak sa v (nekonečnej) rovine pohybujú tak, že robia postupne kroky o veľkosti 1, 2, 3, … (teda k-ty krok má dĺžku k) a po každom kroku sa otočia o 45 stupňov doľava alebo doprava? Jeden možný začiatok ich cesty je znázornený na obrázku.



1.9 Kaďa Mirových Srandičiek
kategória **beta**

Ako tak sedel Krtko na pláži po tom, čo odviedli Incitata, zacnelo sa mu za domovom, a tak siahol do kade, ktorú si priniesol z domu. Vylovil odtiaľ Mirovu prednášku o funkcionálnych rovniciach. Tak sa potešil, že si rovno aj jeden príklad vyriešil.

Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ spĺňajú

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy.$$

1.10 Kúzelná Minihra Starčeka
kategória **beta**

Potom, čo sa Krtko natrápil s Mirovou prednáškou, sa rozhodol, že preskúma Rím. Vybral sa na miestne mestské trhy, kde ho hneď upútal stánok so starčekom hrajúcim hru. Ten mu hneď začal vysvetľovať, ako to funguje.

Máme tabuľku $n \times n$, ktorá má na každom z n^2 políčok napísané jedno celé číslo. V jednom ťahu si môžeme vybrať ľubovoľné políčko a pričítať 1 ku všetkým $2n - 1$ číslam v jeho riadku aj stĺpci. V závislosti od n nájdite najväčšie číslo N také, že pre ľubovoľné počiatočné čísla v tabuľke vieme po konečnom počte ťahov mať aspoň N párnych čísel v tabuľke.