



Zadania 2. kola letnej časti

Termín odoslania 4. 4. 2022 (pre zahraničie 1. 4. 2022)

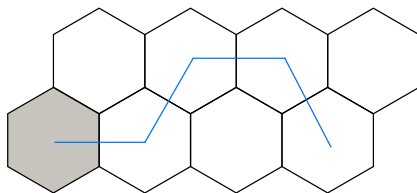
V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

2.1 Krtkova Mozaiková Stena ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Keď sa Krtkovi podarilo vyhrať nad starčekom, starčeka to natoľko napajedilo, že začal úbohého Krtka naháňať po trhovisku. Našťastie sa pred Krtkom zjavil portál a on celý natešený doň skočil, bez toho, aby vedel, kam ho preniesie. Portál Krtka vyplul na Artušov okrúhly stôl. Zaskočený Artuš sa hneď dovätípil, že Krtko nebude miestny a rozhodol sa, že si Krtka nechá ako svojho tajného poradcu. Zavrel ho preto do kumbálu na metly a začal sa radiť so svojimi rytierni, ako s Krtkom naložia. Krtkovi tam bolo už dlho a aj sa poriadne nudil. Tak si sadol do vedra a zapozeral sa na stenu oproti.

Tu si všimol, že stena sa skladá z kachličiek v tvare šesťuholníkov uložených v 2 riadkoch po n kachličiek, ako na obrázku. Krtko položil prst na kachličku vľavo dole. V každom kroku posunie prst na susednú kachličku, ktorá je od nej vpravo hore, vpravo, alebo vpravo dole. Koľko je rôznych kachličiek, na ktorých môže mať Krtko prst po presne n krokoch? Na obrázku nižšie sú nakreslené kachličky pre prípad $n = 4$, na sivej kachličke Krtko začína a modrou je vyznačená jedna možná cesta.



2.2 Kráľovská Majstrovská Skúška ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Po dvoch celých večnostiach sa dvere na kumbále otvorili a Artuš vytiahol Krtka von. Rozhodol sa, že Krtkove kvality overí Kráľovskou majstrovskou skúškou.

Máme pravouhlý trojuholník s dĺžkami odvesien a , b a dĺžkou prepony $b+1$, kde a a b sú kladné celé čísla. Dokážte, že b je párne číslo.

2.3 Kráľova Matematická Samovražda ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa** a **beta**

Keďže Krtko zdolal skúšku ľavou zadnou, tak mu kráľ potajme hodil do vrecka príklad, ktorým sa už dlho trápil. Keď sa Krtko ospravedlnil, že sa pôjde prejsť do záhrady, rukou vo vrecku našmátral dáky papierik. Avšak nebol to žiaden zamilovaný odkaz, ale matematický príklad!

Máme danú priamku p a úsečku AB , ktoré sa pretínajú v bode P rôznom od bodov A, B . Navyše vzdialenosť bodu A od priamky p je dvakrát väčšia ako vzdialenosť bodu B od priamky p . Zostrojte¹ na priamke p body X a Y tak, aby bol trojuholník AXY rovnoramenný so základňou AY a zároveň aby priamka BX bola osou uhla AXY .

2.4 Krtkov Majestátny Šmar ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Ako sa Krtko prechádza po záhrade, zbadá skupinku pávov a hneď ho pochyťí hravá nálada. Na lavičke nájde miskú s chlebom, ktorý využije na ich lov.

To prebieha tak, Krtko šmarí po pávovi chlieb, na ktorý sa páv chytí alebo nie. S pravdepodobnosťou $\frac{1}{5}$ sa Krtkovi podarí šmariť chlieb majestátnym šmarom, pri ktorom sa páv chytí s pravdepodobnosťou $\frac{3}{4}$. V opačnom prípade hodí Krtko chlieb malomocným šmarom, kedy sa páv chytí s pravdepodobnosťou $\frac{1}{10}$. Krtko sa opakovane snaží šmariť chlebom, kým páva nechytí. Aká je pravdepodobnosť, že Krtko chytí páva majestátnym šmarom?

2.5 Každý Môže Spadnúť ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Pávovi sa zapáčila Krtkova čiapka, až ju uchmatol a odletel na neďaleký balkón. To Krtko však nemohol nechať tak, keďže to bola jeho obľúbená čiapka. Začal teda liezť na balkón po brečtane. Ako sa snažil prehupnúť cez zábradlie, zbadal Artušovu manželku Ginevru ako sa bozkáva s Lancelotom. To ho úplne vykoľajilo, až sa mu pošmykli ruky a zrúbal sa na zem. Hlava sa mu zakrútila až tak, že videl poletovať rovnice.

Nájdite všetky hodnoty reálneho parametra p , pre ktorý má rovnica

$$\left| \left| 20|x| - x^2 \right| - p \right| = 21$$

práve 12 rôznych koreňov.

2.6 Krtko + Metly = Srdiečko

kategórie **alfa** a **beta**

Keď sa preberie, vidí Ginevru a Lancelota, ktorí sa nad ním skláňajú. Ginevra sa podujme mu vysvetlovať, že kujú spolu pikle. Na čo sa Krtko ohradí, že on s tým nechce mať nič spoločné, avšak Lancelot ho nepočúva a zavrie ho do kumbálu na metly. Tu si Krtko smutne povzdychne, že azda mu sú metly súdené. Všimne si však vitrážové okno, na ktorom je množstvo trojuholníkov.

V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D, E postupne päty výšok z vrcholov B, C a priesečník týchto výšok označme H . Nech q je kolmica z vrcholu C na priamku DE a I je priesečník q s priamkou BD . Dokážte, že trojuholníky HIC a ABC sú podobné.

¹ Ak ste sa s podobným typom úloh ešte nestretli, môže vám pomôcť krátky text na stránke: https://kms.sk/ako_riesit/konstrukcne_ulohy/.

2.7 Kúzelník Merlin Soptí

kategórie **alfa** a **beta**

Keď sa Krtkovi šťastne podarilo otvoriť okno, celý natešený vyskočil von, nehľadiac kam padá. Dopadne do piesku, kde kúzelník Merlin ráta zapeklitý príklad a celý mu ho rozpráši. Merlina to úplne napajedí, ale Krtko sa hneď ponúkne, že rovnice zaňho vyrieši.

V obore kladných celých čísel vyriešte sústavu rovníc

$$2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2,$$

$$13x = 4y + 3z + 29.$$

2.8 Karambol Matematických Stratégií

kategória **beta**

Na Merlina zapôsobí, ako rýchlo Krtko vyrieši sústavu rovníc, a preto ho pozve k sebe na obed. Po obede Merlin vytiahne hru, aby po toľkom jedle aj trochu rozhýbali mozgy.

Merlin rozdelí čísla $1, 2, \dots, 2n$ do n disjunktných dvojíc (teda každé z $2n$ čísel bude v práve jednej dvojici). Krtko si vyberie práve jedno číslo z každej dvojice, ktorú Merlin vytvoril. Ak súčet čísel, ktoré si Krtko vybral, je násobok $2n$, Krtko vyhrá. Inak vyhrá Merlin. V závislosti od n rozhodnite, ktorý z hráčov má vyhrávajúcu stratégiu².

2.9 Kamufláž Mám Stromovú

kategória **beta**

Po tom, čo spokojne dohrajú hru, sa ozve buchot pred Merlinovou chatrčou. Krtko vykukne z okna von a zbadá vojakov, ktorí ho hľadajú. Neváha ani chvíľu a vylezie cez okno na neďaleký strom. A kým vojaci svedávajú Merlina a prehládávajú dom, Krtko sa obzerá po listoch na strome.

Krtkov strom³ má $2n$ listov. Ukážte, že vždy vieme pridať n hrán tak, aby výsledný graf bol súvislý aj po zmazaní ľubovoľnej hrany (zmazať možno pôvodnú alebo novú hranu).

2.10 Krtkova Maľovacia Seansa

kategória **beta**

Z toľkého vypytovania Merlina rozbolí hlava a vojakov odčaruje späť do hradu. Krtko môže bezpečne zliezť a hneď sa aj Merlinovi poďakuje. Krtko sa s Merlinom rozlúči, že ide maľovať akvarely krajíniek, na čo mu Merlin dá balíček s jedlom na cestu. Keď Krtko domaľuje svoj posledný akvarel západu slnka, rozbalí si Merlinov balíček, v ktorom okrem jedla nájde aj Merlinovu knihu matematických príkladov s autogramom. Začne si knihu listovať a na náhodnej strane nájde...

Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 1. Prirodzené číslo $a > 2$ nazveme n -rozložiteľné, ak $a^n - 2^n$ je deliteľné všetkými číslami tvaru $a^d + 2^d$, kde $d \mid n$ a $1 \leq d < n$. Nájdi všetky n , pre ktoré existuje n -rozložiteľné číslo.

²Vyhrávajúca stratégia je taká, vďaka ktorej hráč vyhrá bez ohľadu na to, ako bude hrať súper.

³[https://sk.wikipedia.org/wiki/Strom_\(te%C3%B3ria_grafov\)](https://sk.wikipedia.org/wiki/Strom_(te%C3%B3ria_grafov))