



## Zadania 3. kola letnej časti

Termín odoslania 25. 4. 2020 (pre zahraničie 22. 4. 2020)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na [kms@kms.sk](mailto:kms@kms.sk).

### 3.1 Kružnicové Máriine Šaty ( $\kappa \leq 1$ )

kategória **alfa**

...hneď, ako dočíta zadanie príkladu z Merlinovej knihy, sa pred ním zjaví portál, ktorý ho tentokrát zoberie do dielne Františka I. Lotrinského. Ten ho hneď zapriahne do práce. Potrebuje totižto vystrihnúť perfektnú kružnicu na šaty pre Máriu Teréziu.

Majme štvorec *REKT* s priesečníkom uhlopriečok *L*. Určte polomer kružnice vpísanej trojuholníku *KEL* vzhľadom na dĺžku strany štvorca.

### 3.2 Kruh Máme Skazený ( $\kappa \leq 2$ )

kategória **alfa**

Krtko mu celý natešený ukáže kruh, ktorý vystrihol. Avšak František ho počastuje: „Veď z toho ja šaty spraviť neviem!“ A hneď začne Krtkovi vysvetľovať, že kružnica musí vhodné parametre:

$$x^2 = 12n + 5$$

Načo sa hneď Krtko zarazí, že veď taká kružnica neexistuje. Ukážte, že mal Krtko pravdu a pre  $x, n \in \mathbb{N}$  nemá rovnica žiadne riešenie.

### 3.3 Kočiar Miesto Súpravy ( $\kappa \leq 3$ )

kategorie **alfa a beta**

František sa mu chce poďakovať, a tak ho pozve k nemu domov do kráľovského paláca. Zavedie ho ku kočiari, kde sa Krtko začudovane opýta: „A veď keď si hovoril, že tento hrad je až vo vedľajšom meste, tak nepôjdeme radšej vlakom? Nebude to rýchlejšie a pohodlnejšie?“ „Vlakom?“ začudovane sa opýta František, „Čo to je? Ako to funguje?“ „Tak tu mi vlak nehrozí...“ Krtko si smutne povzdychol a podujal sa Františkovi vysvetľovať, čo to ten vlak je.

Na železničnej stanici v Krtkovom meste majú dve slepé koľaje, ktoré sa na jednom konci spájajú do jednej, kadiaľ pokračuje trať von z mesta. Na prvej koľaji stojí súprava vlaku pozostávajúca z rušňa a  $n$  navzájom rozlíšiteľných vagónov. V jednom kroku môžu železničiari spraviť nasledovný proces:

- rozpoja súpravu na 1. koľaji na ľubovoľnom mieste;
- rušeň odtiahne vagóny, ktoré ostali za ním zapojené, von z mesta (teda najbližšie k mestu je vagón, ktorý bol predtým na 1. koľaji odpojený od zvyšku);
- rušeň zacúva na 2. koľaj a tým odtlačí vagóny, ktoré boli odtiahnuté von z mesta, pričom ak sa na 2. koľaji už nachádzajú vagóny, tak ich k nim pripojí (teda sa pripojí vagón, ktorý bol najbližšie k mestu);
- pokiaľ ešte na 1. koľaji ostali vagóny, rušeň odpoja od všetkých vagónov na 2. koľaji a vráti sa naspäť na 1. koľaj, kde ho pripoja na vagóny.

Tento proces železničari ľubovoľne opakujú, dokým všetky vagóny neskončia na 2. koľaji.

Kolko rôznych súprav možno týmto spôsobom zložiť?

Napríklad ak na začiatku boli na 1. koľaji za rušňom vozne 1, 2, 3, tak železničari mohli napríklad najskôr rozpojiť súpravu medzi vozňami 2 a 3, potom odtiahnuť vozne 1 a 2 von z mesta a následne ich presunúť na 2. koľaj. Rušeň sa potom vráti na prvú koľaj, pripojí sa k nemu vozeň číslo 3, vyjdú von z mesta a potom prejdú na druhú koľaj. Na konci tak budú na druhej koľaji za rušňom vozne v poradí 3, 1, 2.

### 3.4 Kríza Miestneho Strážnika ( $\kappa \leq 5$ )

kategórie **alfa** a **beta**

Ako prechádzajú hradnou bránou, všimne si Krtko strážnika, ktorý lezie po rebríku na vrch hradieb. Avšak rebrík sa mu pomaličky zošúchava po stene dolu.

Rebrík dĺžky  $d$  sa opiera o stenu. Vzdialenosť spodku rebríka od steny je  $x$ . Potom sa posunie spodok rebríka o vzdialenosť  $x$  ďalej od steny a vrch rebríka sa posunie o  $y_1$  nižšie. Potom sa posunie spodok rebríka znova o  $x$ , vrch rebríka sa posunie o  $y_2$  nižšie a tak ďalej. Postupnosť čísel  $y_i$  je rastúca, klesajúca či konštantná? Urči čísla  $y_i$  v závislosti od  $x$  a  $d$ .

### 3.5 Krtkove Malé Starosti ( $\kappa \leq 8$ )

kategórie **alfa** a **beta**

František zobral Krtka do audienčnej siene, kde mala Mária Terézia práve poradu. Avšak miesto radenia sa o problémoch krajiny jej radcovia naháňali jej 7 detí po celej sále. Nešťastná pestúnka len zalamovala rukami a snažila sa stiahnuť posledné dieťa z rokovacieho stola. Potom, čo František s Krtkom vošli, cisárovná Mária Terézia ukázala prstom na Krtka a spýtala sa: „To je tá nová pestúnka?“ Keďže nečakala na odpoveď, Krtkovi nezostalo nič iné než začať chytať deti. Naraz dostal vynikajúci nápad. Z tašky vytiahol pravidelný osemsten a zapískal. Deti zaujaté neznámym predmetom sa okolo neho zhŕkli a Krtko sa pustil do vysvetľovania svojej hry.

Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 napíšeme na steny pravidelného osemstena, každé práve raz, na každú stenu práve jedno číslo. Aká je pravdepodobnosť, že žiadne dve za sebou idúce čísla nie sú napísané na stenách, ktoré majú spoločnú hranu? Čísla 1 a 8 považujeme tiež za za sebou idúce.

### 3.6 Kalkulácia Mokrosti Sadeníc

kategórie **alfa** a **beta**

Kým sa deti v pokoji hrajú, Krtko má čas a započúva sa do porady Márie Terézie. S jej poradcami sa snaží vyriešiť, koľko vody budú potrebovať na závlahu severného ( $s$ ), južného ( $j$ ), východného ( $v$ ) a západného ( $z$ ) kráľovského trávniku. Krtko zaujatý týmto problémom vytiahne zápisník a začína riešiť daný problém.

Vyriešte sústavu rovníc pre reálne čísla  $s, j, v, z$ .

$$2j + 4sj^3 + 2sjv^2 + 2sjz^2 = 0$$

$$2v + 4sv^3 + 2sj^2v + 2svz^2 = 0$$

$$2z + 4sz^3 + 2sj^2z + 2sv^2z = 0$$

$$j^4 + v^4 + z^4 + j^2v^2 + j^2z^2 + v^2z^2 - 1 = 0$$

### 3.7 Kresba Modifikácie Školstva

kategórie **alfa** a **beta**

Keď sa im vďaka Krtkovi podarí vyriešiť problém so závlahou, Mária Terézia vytiahne obrovský papier a podujme sa kresliť plán novej školskej reformy. Krtko, povzbudený svojimi úspechmi, nezaváha ani na chvíľu a okamžite sa k nim pripojí.

Nech  $O$  je stred kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$ . Kružnica opísaná  $AOB$  pretína priamky  $BC$  a  $AC$  postupne v bodoch  $P$  a  $Q$  ( $P \neq B$ ,  $Q \neq A$ ). Dokážte, že  $O$  je ortocentrum trojuholníka  $CPQ$ .

### 3.8 Konštanty Musíme Škálovať

kategória **beta**

Krtko je tým úplne celý nadchnutý. Všimne si, že aby to celé fungovalo, tak pre počet vyučovacích hodín ( $h$ ), počet učiteľov ( $u$ ) a počet predmetov ( $p$ ) musí platiť nasledujúci vzťah.

Nájdite všetky nezáporné celé čísla  $h$ ,  $u$ ,  $p$ , pre ktoré

$$h! + 5^u = 7^p.$$

### 3.9 Kartičky Matematikov Sčítavame

kategória **beta**

Krtko sa rozlúčil s kráľovskou rodinou s tým, že by sa už mal vrátiť domov. Hoci už veľmi túžil po svojej mäkkej posteli, ešte sa rozhodol, že sa prejde do neďalekého mesta na trhy, aby si pohľadal nejaký suvení. Ako sa tak prechádzal od jedného stánku k druhému, zaujal ho stánok s hrami.

Keď sa pri ňom pristavil, predajca mu hneď začal ukazovať všakovaké kartičky s historickými osobnosťami, kde každá kartička mala priradené práve jedno prirodzené číslo. Ale Krtko mal už histórie dosť, a tak sa ho spýtal, či nemá náhodou nejaké matematické kartičky. Na to mu predajca odvetil, že všetky kartičky, ktoré majú na sebe Fibonacciho čísla<sup>1</sup>  $F_1$  až  $F_{2022}$ , majú na sebe vyobrazeného matematika. Krtko sa potešil a rozhodol sa, že si ich kúpi 2022. Ale keď začal počítať, koľko by ho to stálo, tak zistil, že nemá dosť peňazí. Preto prišiel so záložným plánom, v ktorom si kúpi kartičky s nejakými prirodzenými číslami tak, aby všetky svoje vytúžené vedel z nich nasčítavať.

Koľko najmenej kartičiek si potrebuje Krtko kúpiť, aby vedel každé z Fibonacciho čísel  $F_1$  až  $F_{2022}$  dostať ako súčet čísel na niekoľkých (možno len jednej) z kúpených kartičiek? Krtko si môže kúpiť aj viacero kartičiek s rovnakým číslom. Pri sčítavaní však nemôže jednu konkrétnu kartičku použiť viackrát.

<sup>1</sup>Fibonacciho čísla  $F_1, F_2, F_3$  a tak ďalej sú definované tak, že  $F_1 = 1, F_2 = 1$  a všetky zvyšné Fibonacciho čísla sú určené predpisom  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  pre  $n \geq 3$ .

### 3.10 Kapitola Medzipriestorového Štvoruholníka

kategória **beta**

Keď sa mu konečne podarilo zostaviť všetky kartičky, tak sa mu v rukách naraz rozsvietili a pred ním sa zjavil už známy portál, ktorý ho tentokrát zobral naspäť do T2. Krtko si celý uveličený sadol do kresla, keď tu si všimol, ako ho s otvorenými ústami pozorujú David a Jožko. Krtko sa podujal im vyrozprávať svoje pozoruhodné dobrodružstvá. Jožko nelenil a hneď vytiahol tablet, kde si začal zakresľovať mapu Krtkových ciest. Ako tak Krtko dorozprával, Jožko natešene zvolal: „A veď to je tetivovec v časopriestore!“ Zmätený Krtko sa hneď nahol k tabletu, aby lepšie videl.

Máme štvoruholník  $ABCD$  s vpísanou kružnicou  $k$ , ktorá sa dotýka strán  $BC$ ,  $DA$  postupne v bodoch  $E$ ,  $F$ . Úsečka  $DE$  pretína kružnicu  $k$  druhýkrát v bode  $X$ . Dokážte, že ak sa kružnica opísaná trojuholníku  $DFX$  dotýka priamok  $AB$  a  $CD$ , tak štvoruholník  $AFXC$  je tetivový.