



Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták zimnej časti 44. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľakov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO).

Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chcú by uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený seminár iKS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korešpondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Bližšie informácie o ňom nájdete na stránke www.iksco.org.

Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese kms@kms.sk, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú v hlavičke.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch kôl úloh. Zadania jednotlivých kôl nájdete na stránke <https://kms.sk/ulohy/> vždy aspoň mesiac pred termínom odovzdania daného kola. Úlohy 1 až 8 budú obodované počtom bodov od 0 po 9, úlohy 9 a 10 počtom bodov od 0 po 10. Okrem toho v niektorých špeciálnych prípadoch (popísané nižšie) môžu byť úlohy obodované aj od 0 po 5.

Body sa udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každé kolo sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel/-a, ktoré úlohy môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient κ . Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $\kappa = r + u + c$. Číslo r je tvoj ročník, číslo u je počet tvojich úspešných semestrov a číslo c je počet tvojich úspešných účastí na celoštátnom kole Matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas

neho podarilo získať aspoň 90 bodov alebo si sa zúčastnil/-a sústredenia. Tvoj ročník je prepočítavaný podľa počtu rokov do maturity tak, aby maturant mal ročník 4, teda napr. prváci 5-ročného štúdia majú ročník 0.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient κ je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci študenti. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavajú až po kole, v ktorom pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené úlohy 1 až 7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $\kappa \leq 2$. Ostatné úlohy (3 až 7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

Kategória BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené úlohy 3 až 10. Úlohu číslo 3 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 5$, ale dostanú za ňu najviac 5 bodov (popísané nižšie). Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 5$ a úlohu číslo 5 len študenti s $\kappa \leq 8$. Ostatné úlohy (6 až 10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

Riešenia za 5 bodov

Koeficient κ určuje, ktoré úlohy môže riešiteľ súťažne riešiť (ostatné úlohy môže riešiť tiež, no nebudú zarátané do výsledného poradia). Okrem toho môže riešiteľ za najviac 5 bodov riešiť nasledujúce úlohy, aj keď mu to koeficient nedovoľuje:

- úloha s najvyšším poradovým číslom, ktorú koeficient riešiteľovi nedovoľuje riešiť
- úloha číslo 4

Napríklad:

- riešiteľ s koeficientom 5 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 a 2, v úlohe 3 vie získať 5 bodov, v úlohách 4 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohách 9 a 10 vie získať po 10 bodov
- riešiteľ s koeficientom 9 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 až 3, v úlohách 4 a 5 vie získať po 5 bodov, v úlohách 6 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohách 9 a 10 vie získať po 10 bodov

Bodovanie týchto úloh funguje tak, že opravovateľ ohodnotí úlohu od 0 po 9 bodov ako zvyčajne, ale riešiteľovi sa do súčtu bodov z nej započíta len polovica bodov zaokrúhlená nahor.

Pozývanie na sústredenia

Po každej časti, zimnej aj letnej, sa uskutočnia **dve** sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 36 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci. V rámci jednej časti je možné zúčastniť sa najviac jedného sústredenia.

Pokyny pre riešiteľov

- Úlohy rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu, prípadne odkaz na internetovú stránku, ak si čerpal z internetu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletne riešenie. Riešenie musí byť explicitné (pochopteľné samo o sebe bez ďalších zdrojov) a musí byť skontrolovateľné (v rozumnom čase) ručne opravovateľom (napríklad riešenia využívajúce výpočtovú techniku obvykle ručne skontrolovateľné nie sú).
- Odporúčame Ti pozrieť stránku Ako riešiť úlohy v KMS na adrese www.kms.sk/ako_riesit/, kde nájdeš niekoľko užitočných rád.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia poštou z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Riešenia neodovzdávajte organizátorom osobne.
- Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4. Ku každej úlohe uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine, češtine a riešenia písané v \TeX . Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Na našej stránke www.kms.sk/template si môžeš stiahnuť a vytlačiť predlohy pre riešenia.
- Riešenia píš čitateľne. Ak nebudeme schopní prečítať časť tvojho riešenia, vyhradujeme si právo neudeliť ti za tú časť body. Môžeš zvážiť písanie riešenia na počítači.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia s prípadnou ďalšou korešpondenciou ti môžu byť zasielané domov, na internát alebo na inú adresu (napr. do školy). Nezabudni však v návratke uviesť presnú adresu, kam chceš dostávať poštu.
- Po termíne kola môžeš na našej stránke nájsť vzorové riešenia, príp. aj videovzoráky, ktoré ti pomôžu pochopiť riešenia úloh, s ktorými si mal/-a problém.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr sťažnosť na e-mailovú adresu kms@kms.sk spolu s oskenovaným riešením v prílohe. Žiadosť môžeš poslať aj písomne na našu adresu, ktorú nájdeš v hlavičke letáku. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na kms@kms.sk.

Elektronické posielanie riešení

Svoje riešenia môžeš odovzdať aj v elektronickej podobe na našej stránke. Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš na stránke www.kms.sk/eriesenia. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania kola o **23:59**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú **iba riešenia vo formáte pdf** písané na počítači, prípadne naskenované, **pre každú úlohu jeden súbor**. Pri ich tvorbe odporúčame použiť \TeX alebo export do formátu pdf z iných aplikácií. Môžeš

pritom využiť predlohy, ktoré nájdeš na našej stránke www.kms.sk/template. Ak posielaš oskenované riešenie, daj si pozor, či nie je príliš tmavé a či je čitateľné.

- Nezabudni v hlavičke riešenia uviesť svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Pokiaľ na našej stránke vyplníš všetky potrebné údaje (pozri si návod na www.kms.sk/eriesenia), nemusíš posilať poštou papierovú návratku.

Prijatie na FMFI UK bez prijímačiek

Ak účastník získa v niektorej časti (zimnej, letnej) a ľubovoľnej kategórii KMS aspoň 65 % celkového počtu bodov, a hlási sa na študijný program, ktorého profilovým predmetom je matematika, bude prijatý.

Ba čo viac, ak dosiahne excelentné výsledky a dostane za to Dekanský list, v prípade, že príde študovať na FMFI UK, čaká naňho motivačné štipendium vo výške približne 300 eur.

.....TU ODSTRIHNI.....

Prihláška do zimnej časti KMS 2022/2023 – poslať spolu s 1. kolom!

Meno a priezvisko: Dátum narodenia:
 Škola:
 Rok maturity: Trieda:
 Počet účasti na celoštátnom kole MO:
 Adresa domov:
 Adresa pre poštu (domov – škola – iná):
 Tel. domov: mobil (vlastný):
 e-mail:

Svojím podpisom dávam podľa § 11 a nasl. zákona č. 122/2013 Z.z. o ochrane osobných údajov svoj výslovný súhlas so správou, spracovaním a uchovaním svojich osobných údajov, ktoré poskytujem občianskemu združeniu Trojsten. Poskytujem dobrovoľné údaje s tým, že tieto údaje môžu byť spracované pre (i) ich interné využitie v rámci občianskeho združenia Trojsten za účelom vyhodnotenia uchádzačov o program (ii) za účelom vytvárania databázy uchádzačov pre účely ďalšej spolupráce so študentom. Beriem na vedomie a súhlasím s tým, že Trojsten môže moje údaje dlhodobo uchovávať a spracúvať za účelom poskytovania študentských príležitostí alebo iných odborných alebo spoločenských aktivít občianskeho združenia Trojsten. Súhlas je daný na dobu nevyhnutnú na dosiahnutie účelu spracovania a je ho možné kedykoľvek písomne odvolať.

Podpis:

Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 3. október 2022 (pre zahraničie 30. september 2022)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

1.1 Korigujem Metriky Sprchy ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

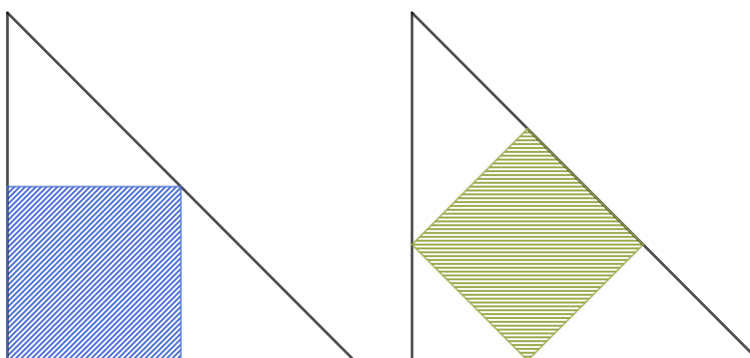
David má veľmi špecifické požiadavky na svoju sprchu. Veľmi mu záleží na životnom prostredí, ale aj na osobnom komforte, a teda požaduje od sprchy prietok $28 \frac{1}{\text{min}}$ a teplotu $29,5^\circ\text{C}$. Na svojom výlete do Blagoevgradu narazil na problém. Po tom, čo s ostatnými Slováckmi prišli na internát, kde boli ubytovaní, všimli si, že sprcha mala len kohútiky s teplou vodou o teplote 38°C a studenou o teplote 10°C . David zároveň vypozeroval, že otočením studeného kohútika o 10° zvýši prietok o $0,5 \frac{1}{\text{min}}$ a otočením teplého o 15° o $1 \frac{1}{\text{min}}$. Takisto si všimol, že zvýšenie prietoku je priamo úmerné otočeniu kohútika. Ako má David otočiť dané kohútiky, aby dosiahol požadované parametre?

Poznámka. Môžete predpokladať, že výsledná teplota vody bude váženým priemerom pôvodných teplôt.

1.2 Krásne Máme Servítky ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Keď sa David osprchoval, išiel sa so svojou partiou naraňajkovať do najbližšej Blagovgradskej jedálne. Kým čakali na svoje jedlo, Nina si všimla, že na stole stojí jedna modrá a jedna zelená váza, pričom obe majú štvorcovú podstavu. Taktiež boli na stole dve servítky zložené do zhodných rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov. Jednotlivé vázy sa dali na tieto servítky položiť tak, ako na obrázku 2.1. Ďalej Nina zistila, že podstava väčšej vázy má stranu dlhú 21 cm. Vedeli by ste z toho zistiť, ako veľkú stranu mala podstava menšej vázy?



Obrázok 2.1: Poloha váz na servítke

1.3 Kopa Matematikov Sedí ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa** a **beta**

Po výdatných raňajkách sa všetci presunuli na otvárací ceremoniál. Jednými zo súťažiacich boli aj Izraelčania, ktorých bolo tento rok hojne. Ich delegácia pozostávala z 25 členov, pričom každý mal svoj unikátny dres s číslom od 1 po 25. Keď prišli na ceremoniál, sadli si na ľavý kraj prázdneho radu s n sedadlami tak, že ich čísla boli usporiadané vzostupne zľava doprava. Potom však zistili, že pri predstavovaní ich budú vyvolávať sprava doľava, a preto sa chceli presadiť tak, aby sedeli tesne vedľa seba, ale zľava doprava zostupne. Aby to nebolo také nudné, rozhodli sa premiestňovať tak, že v každom kroku sa niektorý Izraelčan buď posunie o 1 sedadlo doprava, ak je voľné, alebo prekročí človeka sediaceho tesne napravo a sadne si na nasledujúce sedadlo, ak je voľné. Kým predseda komisie Johnny rozprával o histórii Blagogradu, Majo sa z nudy zamyslel nad tým, či sa to Izraelčanom takto vôbec môže podariť. Nájdite najmenšie n , pre ktoré si Izraelčania v rade s n sedadlami takto presadnúť.

1.4 Končiteľa Musím Skúmať ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Každý dobrý otvárací ceremoniál sa končí veľkou hostinou. V Blagorade sa vždy na hostinách podávajú koláče. David si všimol, že počty koláčov na jednotlivých podnosoch spĺňajú zaujímavé vlastnosti.

Zvoľme si kladné celé číslo n . Cifru c nazveme *končiteľom* čísla n , ak existuje deliteľ čísla n , ktorého posledná cifra je c . Napríklad číslo 156 má končiteľa 1, 2, 3, 4, 6, 8 a 9.

1. Nájdite najmenšie zložené číslo, ktoré má práve jeden končiteľ.
2. Ukážte, že číslo, ktoré má končiteľa 0 a 9, musí mať aspoň štyri ďalšie rôzne končiteľa.
3. Nájdite najmenšie číslo, ktoré má práve 10 končiteľov.

1.5 Kolektív Márne Stratených ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Po ceste z internátov na univerzitu sa Slovákom (prekvapivo?) podarilo stratiť. Keďže ulice Blagordu sa hemžia nebezpečnými mačkami a psami, chcel sa slovenský tím čo najskôr dostať do bezpečia. Miestny Blagordčan im však dal iba hmlisté inštrukcie. Namiesto priamej cesty ich poslal do päty kolmice na kostolnú cestu a odtiaľ 18 krokov doľava a potom 24 doprava. Chudáci Slováci museli vyriešiť jednu úlohu ešte pred samotným súťažným dňom, aby sa ho vôbec mohli zúčastniť.

V trojuholníku ABC označme ako D päťu výšky na stranu AB . Nech M je stred strany AC a N je stred úsečky BD . Vieme, že $|AB| = 24$ a $|CD| = 18$. Určte $|MN|$.

1.6 Kam Mačka Skočí?

kategórie **alfa** a **beta**

Ako si tak Slováci prichádzajú na Blaordskú univerzitu, začujú za sebou dajaké pazvuky. V strachu sa obzerajú okolo seba, či na nich náhodou nevyskočí agresívna mačka, no jediné zviera navôkol je plyšová vydra. Usalašili sa tu totiž starí známi Izraelčania, ktorí si ako prípravu pred súťažou prechádzajú nasledovnú úlohu.

Nech pre každé prirodzené číslo n je a_n prirodzené číslo najbližšie k \sqrt{n} (ak je takých viac, vezmeme vždy to najmenšie; ak je \sqrt{n} prirodzené, tak $a_n = \sqrt{n}$). Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n^2+n} = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2).$$

1.7 Konceptov Míňame Spústu

kategórie **alfa** a **beta**

Po piatich hodinách krkolomného počítania sa David, Lukáš a Teri potrebovali zbaviť svojich šmirákov, a keďže ešte nemali dosť rozmýšľania, zahrli sa takúto hru.

Na začiatku má každý hráč v ruke jeden šmirák a pred nimi je kôpka n šmirákov, kde n je kladné celé číslo. Vo svojom ťahu môže hráč pridať jeden šmirák (ak má nejaký v ruke) do kôpky alebo si z kôpky (ak tam nejaký je) vziať jeden do ruky. Hráč, ktorý vezme z kôpky posledný šmirák, vyhráva. Začína David a potom sa striedajú do kruhu postupne s Lukášom a Teri. Navyše sa Lukáš a Teri spojili a dohodli sa, že budú hrať tak, aby vyhral určite niekto z nich. Pre ktoré n

- dokáže David vyhrať bez ohľadu na to, ako hrajú Lukáš s Teri?
- David nevie síce zaručene vyhrať, ale vie aspoň zabezpečiť, aby Lukáš s Teri nevyhrali po konečnom počte ťahov (teda aby hra trvala donekonečna, ak budú Lukáš s Teri hrať optimálne)?
- vedia Lukáš s Teri vždy poraziť Davida?

Ukážte tiež, ako má/majú v danej situácii postupovať.

Po hre (ak niekedy tá hra skončí) si Slováci plánujú pozrieť psami a mačkami sa hemžiacie centrum Blordu.

1.8 Kde Majo Sedí?

kategória **beta**

Keď sa po prehliadke Bordu Slováci vrátili na internát, rozhodli sa, že si zahrajú spoločenské hry. Vyšli teda na chodbu a sadli si na kružnicu okolo stola. Potom si však všimli, že okolo stola na druhom konci chodby tiež na kružnici sedí nejaká skupinka. Rozhodli sa teda riadiť slovami klasika „Čím viac, team viac“ a kružnice spojili. Majo si všimol, že nech na kružnici sedel kdekôľvek, vždy bolo ich skóre priemerné. Nešlo mu však do hlavy, prečo je to tak.

Kružnice k, l sa pretínajú v bodoch $P \neq Q$. Na kružnici k si zvolíme bod M . Priamky MP, MQ pretínajú kružnicu l postupne v bodoch B, C rôznych od P, Q . Označme X priesečník priamok BQ a CP . Dokážte, že to, či X leží na kružnici k , nezávisí od voľby bodu M (tzn. je to dané iba polohou kružníc k, l). V prípade, že X leží na kružnici k , dokážte navyše, že BC je priemerom l .

1.9 Krútia Makovice Sa

kategória **beta**

Po toľkom počítaní sa našej delegácii zatočili hlavy. A ako im rotovali hlavy, tak im rotovali aj čísla, s ktorými počítali. Najväčší hlavýbôľ však prišiel, keď to zašlo do Bodu, že všetky tieto zrotované čísla boli násobkami toho pôvodného.

Nech $n \in \mathbb{N}$. Zoberme si n -ciferné číslo $A = \overline{a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, ktorého cifry a_0, a_1, \dots, a_{n-1} sú nenulové a zároveň nie sú všetky rovnaké. Označme ďalej pre $1 \leq k < n$ ako A_k číslo, ktoré vznikne po zrotovaní cifier A o k pozícii, teda $A_k = \overline{a_{n-k-1} \dots a_1 a_0 a_{n-1} \dots a_{n-k}}$. Nájdite všetky A také, že každé A_k je deliteľné číslom A .

1.10 Kopeme Mesto Stratené

kategória **beta**

V jednom momente si matfyzní počtári všimli, že sa im to už nejak kráti. Opustili preto Od a zašli si pozrieť Sofiu. Je to tam samá vykopávka, takže im netrvalo dlho, kým narazili na kamennú fontánu. Už v nej síce nebola voda, no kedysi určite reálne slúžila na niečo prospešné. Pomôžte im zistiť, na čo konkrétne.

Nájdite všetky kladné reálne funkcie $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ spĺňajúce pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ vzťah

$$f(f(x) + y) \cdot f(x) = f(xy + 1).$$