



## Zadania 2. kola zimnej časti

Termín odoslania 2. november 2022 (pre zahraničie 28. október 2022)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na [kms@kms.sk](mailto:kms@kms.sk).

### 2.1 Kúpim Merač Spravodlivosti ( $\kappa \leq 1$ )

kategória **alfa**

Prechádzal som sa po lese, až som našiel perníkovú chalúpku. Vošiel som dnu, že sa poobzerám, keď tu zrazu do chalúčky vošlo 5 trpaslíkov. Každý z nich mal čiapočku – buď modrú, alebo červenú. Trpaslík s modrou čiapočkou vždy hovorí pravdu, trpaslík s červenou čiapočkou vždy klame. Každý z nich vidí na čiapočky ostatných, no nie na svoju. Postupne mi povedali:

- Lavórik: „Vidím 4 modré čiapočky.“
- Kuckuc: „Vidím 3 modré čiapočky a 1 červenú.“
- Bojkoš: „Vidím 1 modrú čiapočku a 3 červené.“
- Chrapoš: „Vidím 4 červené čiapočky.“
- Havoš nepovedal nič.

Som však farboslepý, a teda potrebujem detektor lži. Alternatívne kúpim aj riešenie tejto úlohy, v ktorom zistíte, ktorý trpaslík má čiapočku ktorej farby. V prípade spokojnosti ponúkam až 9 bodov.

### 2.2 Kúpim Matematické Sústreďenie ( $\kappa \leq 2$ )

kategória **alfa**

Rád by som sa stretával s rôznymi matematickými úkazmi. Preto sa chcem zúčastniť matematického sústreďenia. Zúčastniť sa však môžem len celej časti.

Nech  $a, b, c$  sú nezáporné reálne čísla. Ukážte, že

$$a + b + c - \lfloor a + b \rfloor - \lfloor a + b + c - \lfloor a + b \rfloor \rfloor = a + b + c - \lfloor b + c \rfloor - \lfloor a + b + c - \lfloor b + c \rfloor \rfloor.$$

*Poznámka.* Označenie  $\lfloor x \rfloor$ , slovné aj (dolná) celá časť čísla  $x$ , označuje najväčšie celé číslo neprevyšujúce  $x$ .

### 2.3 Kúpim Mak Siaty ( $\kappa \leq 3$ )

kategórie **alfa** a **beta**

Ako finalista majstrovstiev sveta v mletí maku potrebujem tréning. Preto kúpim 4247 ton maku. Pri mletí maku treba mak rozdeliť na čo najväčšie časti, zháňam teda aj najväčšieho deliteľa.

V závislosti na  $a, b \in \mathbb{Z}$  určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel  $3ab$  a  $a^2 + b^2$ .

## 2.4 Kúpim Myši Syr ( $\kappa \leq 5$ )

kategórie **alfa** a **beta**

Na narodeniny som dostal pascu na myši. Aby fungovala, potrebujem do nej trojuholník syra pre moju trojuholníkovú myš.

Majme trojuholník  $MYŠ$  s bodom  $F$  na strane  $MŠ$ . Označme  $R$  a  $S$  postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom  $FYŠ$  a  $MFY$ . Dokážte, že trojuholníky  $MYŠ$  a  $SYR$  sú podobné.

## 2.5 Kúpim Majstrovskú Stratégiu ( $\kappa \leq 8$ )

kategórie **alfa** a **beta**

Devil Voršiper ma vyzval na súboj so šachovými vežami. Súboj má nasledujúce pravidlá: Každý vežtec má v jednom z protiláhlých rohov šachovnice  $8 \times 8$  svoju vežu. Veža chráni celý svoj riadok a stĺpec. Vežtec môže svoju vežu presunúť vodorovne alebo zvislo tak, aby neprekročil stĺpec ani riadok, ktorý chráni súperova veža. Vežtec, ktorý už nevie svoju vežu pohnúť, prehráva. Je výhodnejšie, aby som začínal či mám prenechať prvý ťah Voršiperovi? Kúpim víťaznú stratégiu pre niektorého z vežtcov alebo dôkaz, že ani jeden takú nemá.

## 2.6 Kúpim Mlynček, Súrne!

kategórie **alfa** a **beta**

Od finalistu majstrovstiev sveta v mletí maku som sa dozvedel, že mletie maku výrazne zvyšuje integilénčný kvocient. Tiež by som sa to chcel naučiť. Preto kúpim mlynček. Súrne.

Máme funkciu  $f$ , ktorá každému prirodzenému číslu  $m$  priradí reálne číslo  $f(m)$ . Vieme o nej, že pre všetky kladné celé  $a, b, n$ , ktoré spĺňajú  $a + b = 2^n$ , platí

$$f(a) + f(b) = n^2.$$

Určte  $f(2022)$ .

## 2.7 Kúpim Mokrú Studňu

kategórie **alfa** a **beta**

Doma v kuchyni mám nové štvorčekové dlaždice. Nemám doma iný zdroj vody, tak potrebujem studňu. Nie však ledajakú. Aby sa mi nepokazilo feng-šuej, musí spĺňať nasledujúce podmienky:

1. Musí mať tvar  $n$ -uholníka.
2. Vrcholy tohto  $n$ -uholníka musia ležať v mrežových bodoch štvorčekovej siete so štvorčkami so stranou dĺžky 1.
3. Keď si napíšeme druhé mocniny dĺžok jeho strán od najmenej po najväčšiu, dostaneme  $n$  po sebe idúcich prirodzených čísel.

Existuje taká studňa pre

- $n = 2022$ ?
- $n = 3$ ?

## 2.8 Kúpim Metrové Súvetie

kategória **beta**

Môj problém spočíva v tom, že neviem, kedy ukončiť vetu, pretože sa v nej vždy točím do kruhu, ako v prípade trojuholníka  $ABC$ , ktorého vpísaná kružnica sa dotýka strán  $AB$  a  $AC$  postupne v bodoch  $D$  a  $E$  a ktorého pripísaná kružnica k strane  $BC$  sa priamok  $AB$  a  $AC$  dotýka postupne v bodoch  $F$  a  $G$ , pričom osi vnútorných uhlov  $\sphericalangle CBA$  a  $\sphericalangle ACB$  pretínajú priamku  $DE$  v bodoch  $X$  a  $Y$ , a osi tých istých vonkajších uhlov pretínajú priamku  $FG$  v bodoch  $Z$  a  $W$ , čo ma núti dať vám za úlohu dokázať, že  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  a  $W$  ležia na kružnici.

## 2.9 Kúpim Milión Stužiek

kategória **beta**

Môj hrad má 43 vežičiek rozložených pravidelne na kružnici. Na jeho výzdobu potrebujem kúpiť veľa stužiek. Každé dve veže totiž prepojam práve jednou, modrou alebo červenou. Z každej veže bude viesť práve 20 červených a 22 modrých stužiek. Trojicu veží nazveme modrým (resp. červeným) triom, ak medzi nimi vedú len stužky modrej (resp. červenej) farby. Predpokladajme, že na mojom hrade je 2022 modrých trií. Koľko je červených trií? Uvedte všetky možnosti.

## 2.10 Kúpim Mäkké Spoluhlásky

kategória **beta**

Bol som v Lidli kupovať písmenká do šošovicovej polievky, ale nemali tam ani mäkké  $F$ . Potrebujem teda doplniť zásoby mäkkých písmeniek.

Je daný rovnobežník  $\check{A}\check{B}\check{C}\check{D}$ . Označme  $\check{I}$  stred kružnice vpísanej trojuholníku  $\check{A}\check{B}\check{D}$  a  $\check{\omega}$  kružnicu vpísanú trojuholníku  $\check{B}\check{C}\check{D}$ , ktorá sa dotýka strany  $\check{B}\check{D}$  v bode  $\check{E}$ . Priamky  $\check{A}\check{E}$  a  $\check{I}\check{E}$  pretínajú  $\check{\omega}$  postupne v bodoch  $\check{F}$  a  $\check{G}$ .

Nech  $\check{E}'$  je bod ležiaci oproti  $\check{E}$  na  $\check{\omega}$ . Os uhla  $\check{G}\check{E}\check{E}'$  pretína  $\check{G}\check{E}'$  v bode  $\check{X}$ . Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku  $\check{E}\check{X}\check{F}$  leží na priamke  $\check{B}\check{D}$ .