



Zadania 3. kola zimnej časti

Termín odoslania 5. december 2022 (pre zahraničie 2. december 2022)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

3.1 Kopce Masívnych Sťažností ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Vedúci KMSka sa vydali na výlet do čarokrásnych lesov. Vopred sa však nedohodli na trase, a tak skupinka viac či menej nahnevaných vedúcich začala stúpať do príliš strmého kopca. Nadmorská výška bola síce príliš vysoká, no KMS vedúci si aj za takýchto okolností na nej všimli niečo zaujímavé.

Kolko existuje rôznych štvorciferných čísel, ktorých prvé dvojčísle je zároveň aj ciferným súčtom?

3.2 Klobúk Muchotrávky Skopnutej ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Počas toho, ako sa vedúci sťažovali, sa Jožko prechádzal po okolí. Ako sa tak obzeral, zakopol o jednu zvláštnu hubu. Huba, o ktorú Jožko zakopol, mala klobúk v tvare trojuholníka. Nebol to ale obyčajný trojuholníkový klobúk.

V rovine je daný trojuholník ABC . Pre jeho uhly platí $|\sphericalangle ABC| = 2 \cdot |\sphericalangle BAC|$. Taktiež na jeho strane AB leží bod D taký, že $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD|$ a navyše $|CD| = |BC|$. Určte veľkosť uhla $\sphericalangle BAC$.

3.3 Kocky Marekových Snov ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa a beta**

Po tom, čo vedúci premrhali polhodinu debatovaním o tom, ako by sa mala vybrať trasa výletu, sa rozhodli, že by sa mali všetci spoločne zhodnúť na najbližšom postupe. A tak sa spoločne rozhodli, že rozhodnutie nechajú na náhodu pri hode Marekovými vysnívanými kockami.

Každá Marekova vysnívaná kocka má vrcholy v nejakom poradí očíslované číslami od 1 po 8 (každé z nich je v práve jednom vrchole každej kocky). Na každej stene je napísaný súčet čísel vo vrcholoch tej steny. Marekove vysnívané kocky sú však iba tie, ktoré majú na všetkých stenách prvočísla a navyše počet rôznych prvočísel na stenách je najväčší možný (spomedzi tých kociek, ktoré majú na stenách len prvočísla). Nájdite všetky neusporiadané¹ šesticte prvočísel, ktoré môžu byť na stenách Marekovej vysnívanej kocky.

3.4 Krátky Matihu Spor ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa a beta**

Matimu sa ale nepáčilo, že osud výletu bol ponechaný na náhodu. Myslel si, že sa tak nemôžu pokryť všetky možnosti výberu cesty. Marek sa urazil, lebo jeho vysnívaná kocka má všetky odpovede na všetky možné otázky a začal Matimu dokazovať svoje tvrdenie.

Dokážte aj vy Matimu, že pre každé kladné celé číslo existuje nejaký jeho celočíselný násobok, ktorý obsahuje (v desiatkovej sústave) každú cifru aspoň raz.

¹Záleží iba na tom, ktoré číslo sa koľkokrát vyskytuje, a nie na konkrétnom rozložení čísel na kocke.

3.5 Komparovaním Mužov Súdim ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Mati pochopil, že sa s Marekom nemôže porovnávať, a tak túto úlohu prenechal na Teri.

Teri porovnáva Matiho a Mareka, ktorí si za svojich reprezentantov zvolili dve nezáporné reálne čísla x, y také, že $x + y = 2$. Dokážte, že

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2.$$

3.6 Kaja Môže Skartovať

kategórie **alfa** a **beta**

Kaju už ale nudí stáť na mieste. Začala teda tlačiť všetkých vedúcich smerom vybratým Marekovou vysnívanou kockou.

Kaja tlačila vedúcich po kružnici k s priemerom AB . Ďalej je na k daná tetiva PQ so stredom R . Nech S, T sú päty kolmíc na AB postupne z P, Q . Predpokladajme, že body R, S, T sú rôzne a neležia na jednej priamke. Dokážte, že trojuholník RST je rovnostranný práve vtedy, keď $2 \cdot |PQ| = |AB|$.

3.7 Konáre Metodicky Spraceme

kategórie **alfa** a **beta**

Kým Kaja tlačila väčšinu vedúcich po kružnici, Mati a Viktor zatiaľ hádzali kamene a konáre do jazierka a pritom sa hrali takúto hru.

Na zemi sú nakreslené dve tabuľky s rozmermi $n \times n$ – jedna je Viktorova, druhá Matiho. Na každom políčku je buď kameň alebo konár, a tie sú na začiatku v oboch tabuľkách rozmiestnené rovnako. Mati a Viktor chcú všetky políčka vyprázdniť, ale majú na to rôznu metodiku. Mati vo svojej tabuľke robí iba ťahy, kde v každom vezme riadok s presne jedným políčkom, na ktorom je konár, označme ho P , a vyprázdni všetky políčka v stĺpci obsahujúcom políčko P . Naopak Viktor si vo svojej tabuľke v jednom ťahu vyberie stĺpec s presne jedným políčkom, na ktorom je konár, označme ho Q , a vyprázdni všetky políčka v riadku obsahujúcom políčko Q .

Dokážte, že ak bola Viktorova a Matiho tabuľka na začiatku vyplnená rovnako, tak Mati vie svojou procedúrou vyprázdniť všetky políčka práve vtedy, keď to dokáže Viktor.

3.8 Kedy Mám Strašiť

kategória **beta**

Jožko sa odpojil od vedúcich, ktorých tlačila Kaja po kružnici a rozhodol sa ich vystrašiť na začiatku ich najbližšieho okruhu. Má však veľmi prísne pravidlá pre strašenie vedúcich.

Jožko je ochotný vystrašiť vedúcich v okruhu s číslom $k \in \mathbb{N}$ len vtedy, ak pre každé nepárne prirodzené číslo $n > 100$ platí $k \mid 20^n + 22^n$. Nájdite všetky také prirodzené čísla k .

3.9 Keď Mizne Slnko

kategória **beta**

Po takom kvalitnom vystrašení sa vedúci rozhodli vrátiť naspäť na chatu, lebo už sa začalo stmievať. Čakala na nich ale jedna veľká nerovnosť na ceste. Nerovnosť na ceste bola veľmi špecifická.

Kladné reálne čísla x_1 až x_n spĺňajú $x_1x_2\dots x_n = 1$. Dokážte, že

$$\{x_1\} + \{x_2\} + \dots + \{x_n\} < \frac{2n-1}{2},$$

kde $\{x\}$ značí desatinnú časť čísla x .

3.10 Karty Miesto Stravy

kategória **beta**

Keď sa vedúci KMSka konečne vrátili na chatu, už sa im nechcelo variť. Namiesto toho si zahrli hru OhNoStroje. Lukáš a Teri si občas čítajú myšlienky, čím v hre OhNoStroje občasne vynikajú. V tento večer sa rozhodli staviť na svoje šťastie a vyzvali Jožka na súboj. Balíček kariet hry OhNoStroje pozostáva z 50 kariet. Každá karta je jednej z piatich farieb (červená, žltá, zelená, modrá alebo biela) a má celočíselnú hodnotu od 1 do 5. Z každej farby je v balíčku 10 kariet: 3 jednotky, 2 dvojky, 2 trojky, 2 štvorky a 1 päťka. Farba a číslo sa nachádzajú na lícovej strane karty. Všetky karty majú rovnakú rubovú stranu.

Na začiatku Jožko vyberie z balíku 4 karty (podľa svojej voľby) a dá ich Lukášovi do ruky tak, aby Lukáš videl z nich len rubovú stranu a aby Teri videla lícovú stranu (zoradenie Lukášových kariet si tiež zvolí Jožko). Potom Jožko napíše na papier jednu z kariet, ktoré dal Lukášovi, a papier ukáže Teri tak, aby ho Lukáš nevidel. Následne Teri dá Lukášovi nápovedu o jeho kartách nasledovne: vyberie si buď hodnotu alebo farbu, **povie ju Lukášovi** a ukáže na všetky jeho karty vybranej hodnoty alebo farby. Teri pri tom musí ukázať na aspoň jednu kartu. Na záver Lukáš vyberie jednu kartu z ruky a vyloží ju pred seba.

Pokiaľ Lukáš vyloží kartu, ktorá bola napísaná na papieri, tak Teri s Lukášom vyhrávajú. V opačnom prípade vyhráva Jožko. V prípade, že má Lukáš na ruke dve alebo tri totožné karty (teda s rovnakou farbou aj hodnotou), môže vyložiť ľubovoľnú z nich. Rozhodnite, či si Teri s Lukášom vie dohodnúť stratégiu, ktorá im zaručí výhru nad Jožkom.