



Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 27. február 2023 (pre zahraničie 24. február 2023)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

1.1 Kika Menežuje Stoky ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Kika bola farmárka, ktorá žila blízko malej vodnej nádrže na svojom pozemku. Mala tri rúry, ktoré mohla použiť na naplnenie vodnej nádrže: Hornú rúru, Dolu rúru a Strednú rúru. Kika si všimla, že každá rúra má konštantný prietok, ktorý nie je ovplyvnený prietokom v ostatných rúrach. Jedného dňa sa Kika rozhodla naplniť prázdnu vodnú nádrž. Vedela, že naplnenie vodnej nádrže Dolnou a Hornou rúrou by trvalo 3 dni, použitím Hornej a Strednej rúry 4 dni a pomocou Dolnej a Strednej rúry by to trvalo až 6 dní.

Ako dlho bude Kike trvať naplniť celú vodnú nádrž, ak použije Dolnú, Strednú a Hornú rúru naraz?

1.2 Kúzelník Miloš Šťastný ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Miloš bol veľkým fanúšikom kúziel a vždy hľadal spôsoby, ako sa ich naučiť viac. Kedysi dávno počul o veľmi silnom kúzle, v ktorom sa vyskytovali čísla, ktoré ale dlho nevedel nájsť.

Kúzelník Miloš bol šťastný, pretože po dlhých rokoch hľadania konečne našiel všetky prirodzené čísla N , ktoré sa v desiatkovej sústave skladajú presne z 1112 cifier a spĺňajú všetky tieto podmienky:

- súčet všetkých cifier čísla N je deliteľný 2000;
- súčet všetkých cifier čísla $N + 1$ je tiež deliteľný 2000;
- číslo N obsahuje cifru 1.

Určte všetky čísla, ktoré kúzelník Miloš našiel.

1.3 Kde Máme Sneh ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa a beta**

Lukáš je mladý a nadšený lyžiar, preto sa rozhodol zúčastniť sa pretekov v zjazdovom lyžovaní, ktorých sa zúčastnilo $n \geq 17$ pretekárov. Preteky sa skladali z 5 kôl, každý deň od pondelka do piatka prebehlo jedno kolo. V pondelok skončil Lukáš na 17. a v utorok na 15. mieste. V stredu sa dostal na 14. miesto. Vo štvrtok trochu znervóznel a skončil na 16. mieste. V piatkovom, poslednom, zjazde sa Lukášovi darilo o trochu viac a skončil na 13. mieste. Na konci bolo všetkých n pretekárov zoradených do celkového poradia podľa súčtu časov za všetkých päť kôl. V závislosti od n zistíte, ako najlepšie mohol Lukáš skončiť v celkovom poradí.

1.4 Kráľovstvo Múdreho Svetovládca ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa a beta**

Kráľ bol veľmi múdry a rád sa zaoberal matematikou. Jedného dňa si vzal mapu svojho kráľovstva a začal na nej skúmať rôzne tvary. Zaujali ho najmä štvorce a kružnice. Keď sa pozrel na mapu bližšie, zistil, že niektoré štvorce sú obklopené kružnicami. A tak sa rozhodol, že skúsi zistiť, či je možné, aby stredy kružníc ležali vo vrcholoch nejakého štvorca.

Majme štvorec $ABCD$ a bod E , ktorý leží vnútri uhlopriečky BD . Nech O_1 je stred kružnice, ktorá prechádza cez body A, B, E , a nech O_2 je stred kružnice, ktorá prechádza cez body A, D, E . Dokážte, že AO_1EO_2 je štvorec.

1.5 Kúzelné Matúšove Sústavy ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Jedného dňa sa objavil v kráľovstve mladý kúzelník menom Matúš. Bol veľmi talentovaný a rád sa zaoberal matematikou. Keď sa dozvedel o sústave rovníc, ktorú kráľ potreboval vyriešiť, rozhodol sa, že mu pomôže. Matúš sa zamyslel a po chvíli sa mu podarilo túto sústavu vyriešiť. Keď sa kráľ dozvedel o jeho úspechu, bol veľmi potešený a odmenil ho kúzelným prstom, ktorý dokázal vyriešiť akékoľvek matematické úlohy. Matúš bol veľmi šťastný a vďačný za tento darček a vďaka nemu sa stal najmocnejším kúzelníkom v kráľovstve.

Nájdite všetky trojice reálnych čísel (x, y, z) , ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$x = \sqrt{2y + 3},$$

$$y = \sqrt{2z + 3},$$

$$z = \sqrt{2x + 3}.$$

1.6 Kráľov Milovaný Štvorček

kategórie **alfa** a **beta**

V kráľovstve bol malý kúzelný Štvorček, ktorý bol schopný vyriešiť akékoľvek matematické úlohy. Kráľ sa o ňom dozvedel a rozhodol sa, že ho použije na vyriešenie zložitej úlohy so šachovnicou. Keď Štvorček dostal úlohu, zamyslel sa a po chvíli mu bolo jasné, ako to urobiť. Kráľ bol nadšený, keď sa dozvedel výsledok, a rozhodol sa, že Štvorček bude jeho oficiálnym poradcom pre všetky matematické úlohy. A tak sa aj stalo!

Štvorčekovou úlohou bolo pre dané $n \geq 2$ vyplniť šachovnicu $n \times n$ číslami 1 a -1 tak, aby v každom štvorci 2×2 bol súčet čísel na jeho políčkach rovný 0. V závislosti od n určte, koľkými spôsobmi mohol Štvorček takto šachovnicu vyplniť.

1.7 Kruh Mágie Sadu

kategórie **alfa** a **beta**

V kráľovstve bol kúzelný kruh, ktorý sa nachádzal uprostred záhrady. Bol veľmi záhadný a nikto nevedel, odkiaľ sa vzal. Keď sa o ňom dozvedel kráľ, rozhodol sa, že ho využije na vyriešenie zložitej úlohy s uhlami.

Na kružnicu nakreslil štyri body A, B, C a D tak, že $|AB| = |BC| = |CD|$. Potom nariadil svojim matematikom, aby vypočítali veľkosť uhla ABC , ak vedia, že osi uhlov ABD a ACD sa pretínajú v bode E a priamky AE, CD sú rovnobežné. Nájdite veľkosť uhla ABC aj vy.

1.8 Konštantu Mišo Stopuje

kategória **beta**

Jožo s Mišom sa boli prejsť po kráľovstve a aby sa nenudili, vymysleli si hru. Jožo si vybral celé číslo od 1 do 2023 (vrátane) a Mišo sa ho snažil uhádnuť. Mišo si mohol vybrať ľubovoľné kladné celé číslo d a spýtať sa Jožu otázku: „Je tvoje číslo deliteľné číslom d ?“ Jožo na otázku pravdivo odpovedal áno alebo nie. Takýchto otázok sa Mišo spýtal niekoľko, až nakoniec vedel s istotou povedať, aké číslo si Jožo vybral.

Najmenej koľko otázok Mišovi určite stačilo, aby vedel jednoznačne určiť Jožovo číslo?

1.9 Kolosálne Medziludské Spoločnosti

kategória **beta**

V krajine ďaleko, ďaleko za horami sú dve spoločnosti, ktoré sa rozhodli spojiť sily a vytvoriť jednu veľkú firmu. Manažéri týchto spoločností sú umiestnení na dvoch miestach 1000 kilometrov od seba. Na úsečke medzi nimi sa nachádza n rôznych bodov, na ktorých sú umiestnení matematici.

Každú sekundu sa v rovnakom momente pohne každý matematik do stredu úsečky spájajúcej jeho s najbližším matematikom alebo manažérom. Ak je matematik rovnako vzdialený od dvoch ľudí, tak si vyberie, ktorým smerom sa posunie. Ak sa náhodou vyskytnú dvaja matematici na rovnakom mieste, mladší z nich je zastrašený jeho starším kolegom, a tak radšej zavesí svoje povolanie matematika na klinec a navždy odíde.

Keď sa matematik dostane do vzdialenosti najviac 1 meter od niektorého manažéra, môže si s ním podať ruku (a keď je ďalej, tak nie). Pri podávaní rúk sa nikto neposúva.

Ukážte, že bez ohľadu na rozhodnutia matematikov bude po konečnom počte sekúnd každý zo zostávajúcich matematikov vzdialený najviac 1 meter od niektorého manažéra, a teda si s ním bude môcť podať ruku.

1.10 Krtko Mýlil Sa

kategória **beta**

V kráľovstve ďaleko, ďaleko za horami bol kráľ, ktorý bol veľmi bohatý. Mal nekonečné množstvo zlata a drahých kameňov, ale jedna vec mu chýbala – poklad. Chcel nájsť poklad, ktorý by bol tak cenný, že by ho nikto iný nemal.

Jedného dňa prišiel Krtko s neobvyklým riešením. Povedal kráľovi, že existuje poklad, ktorý sa skrýva v dvojiciach celých čísel (x, y) , ktoré spĺňajú rovnicu

$$x^2 - y^3 = 999.$$

Kráľ sa veľmi tešil, že sa mu podarilo nájsť taký vzácny poklad.

Krtko začal hľadať dvojice čísel, ktoré spĺňali rovnicu. Bol veľmi trpezlivý a dôsledný a po dlhom hľadaní našiel nasledovné dvojice čísel: $(27, 9)$, $(32, 8)$, $(36, 7)$. Kráľ bol veľmi rozhorčený, keď zistil, že Krtkovo riešenie je zle! Pomôžte kráľovi nájsť jeho vysnený poklad a nájdite všetky celočíselné riešenia danej rovnice.