Zadania 2. kola letnej časti

Termín odoslania 3. apríl 2023 (pre zahraničie 31. marec 2023)
V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

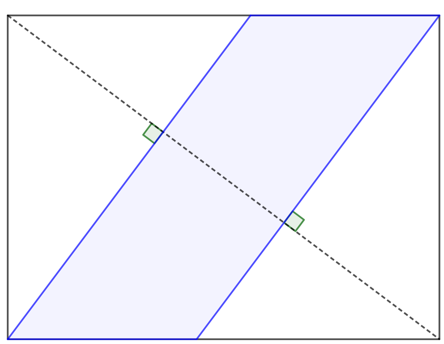
2.1 Kasíno Mokrých Spŕch ($\kappa \leq 1$) — kategória **alfa**

Žirafka Kubko bola, ako každý štvrtok večer, v kasíne na dámskych sprchách zahrať si kocky. Avšak tento štvrtok tam nebola žiadna konkurencia. Kubka to úplne zarmútilo, ako si má žirafka zahrať hazard, keď má výhru skoro istú. A tak sa radšej išla hrať s n kockami. Keď si z nich všetkých chcela postaviť štvorec (t. j. kváder $1 \times a \times a$ pre nejaké prirodzené číslo a), zistila, že jej jedna chýba. Keď si z nich chcela postaviť kocku, opäť jej jedna chýbala. Ukážte, že n nie je prvočíslo.

2.2 Kde Most Stavať? ($\kappa \leq 2$) — kategória **alfa**

Žirafka Pedro sa potulovala po svojom obdĺžnikovom výbehu, keď tu si všimla, že jej výbehom prechádza rieka, ktorá tam nikdy predtým nebola. Podišla bližšie, aby ju mohla preskúmať.

Brehy riek sa tiahli rovno od protiľahlých vrcholov kolmo na uhlopriečku výbehu spájajúcu ostatné dva vrcholy až ku protiľahlým stranám, ako na obrázku 2.1 (obrázok je len ilustračný). Akú časť Pedrovho výbehu zaberala rieka, ak boli rozmery výbehu 30 m × 40 m?



Obrázok 2.1: *Výbeh*

2.3 Kradneme Mačku Sfingu ($\kappa \leq 3$) kategórie **alfa** a **beta**

Žirafka Mati sa prechádzala púšťou, keď tu kútikom oka zbadala veľké trojuholníkové objekty. Po chvíli úpenlivého hľadenia si uvedomila, že to vyzerá ako jej obľúbené sčítacie pyramídy. Tu sa však nič nesčituje! Bola z toho rozhorčená, a tak si začala do piesku kresliť klasickú sčítaciu pyramídu.

Sčítaciu pyramída má základňu veľkosti 6[1] a naspodu má 6 po sebe idúcich čísel, v ľubovoľnom poradí. Keď pyramídu žirafka vyplnila, navrchu jej vyšlo číslo 2022. Avšak keď sa o rok vrátila pozrieť pyramídy, svoju už v piesku nenašla. Aké čísla mohli byť na spodnom poschodí pôvodnej pyramídy, a v akom poradí? Nájdite všetky možnosti.

2.4 Krv z Miech Špliecha ($\kappa \leq 5$) kategórie **alfa** a **beta**

Žirafka Lucka bola na exkurzii v nemocnici, kde bola svedkom chirurgickej operácie. To ju zaujalo natoľko, že sa rozhodla s touto operáciou pohrať doma (samozrejme len na plyšových zvieratkách).

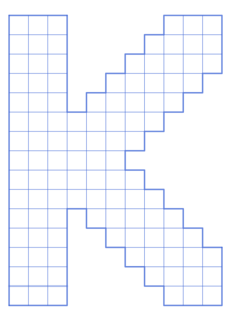
Nech operácia $a * b$ je definovaná ako $a * b = a + b - \lfloor a + b \rfloor$.[2] Uvažujme čísla tvaru x, $x * x$, $(x * x) * x$, $((x * x) * x) * x$, ... až po ľubovoľné konečné opakovanie operácie $*$. Dokážte, že existuje nekonečne veľa čísel $x \in \langle 0; 1)$, pre ktoré sa žiadne z týchto čísel nerovná nule.

2.5 Krotil Medveď Strelcov? ($\kappa \leq 8$) kategórie **alfa** a **beta**

Medveď Daniel bol na lukostreleckej súťaži, na ktorej povedal faaakt zlý vtip o žirafách. Žirafky to nemohli nechať len tak, takže Medveďa Daniela zmlátili. Zhabali mu aj všetky luky a šípy, a tak sa z nich stali žirafí strelci.

Majme prvú KMS šachovnicu ako na obrázku 5.1. Žirafí strelec sa vie hýbať diagonálne o ľubovoľný počet políčok, ale počas svojho pohybu nesmie opustiť šachovnicu.

1. Koľko najviac žirafích strelcov možno umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiaden žirafí strelec nedokázal jedným ťahom pohnúť na políčko iného žirafieho strelca?
2. Koľko najmenej farieb je potrebných na ofarbenie políčok šachovnice tak, aby medzi ľubovoľnými dvoma políčkami rovnakej farby bolo možné spraviť jeden ťah žirafím strelcom?



Obrázok 5.1: *Prvá z troch KMS šachovníc*

[1] Teda číslo je vždy súčtom tých dvoch pod ním a úplne naspodku je 6 čísel.

[2] Dolná celá časť $\lfloor a + b \rfloor$ je definovaná ako najväčšie celé číslo z také, že $z \leq a + b$, teda $\lfloor 0,9 + 1,8 \rfloor = \lfloor 2,7 \rfloor = 2$ alebo $\lfloor -3,2 + 0,4 \rfloor = \lfloor -2,8 \rfloor = -3$.

2.6 (NE)Konvexne Miznú Škvrny

kategórie **alfa** a **beta**

Žirafka Viktor sa rozhodla, že sa pôjde kúpať do Bermudského trojuholníka. Keď vyliezla z vody, všimla si na sebe niečo podivné. Namiesto zvyčajných škvŕn mala zrazu po celom tele nekonvexné trolluholníky. Nevedela, čo s tým spraviť, tak sa išla poradiť za miestnou čarodejnicou Kajou. Tá jej povedala, že jediný spôsob ako to vyliečiť, je vyriešiť nasledujúcu úlohu.

V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D pätu výšky na stranu BC. Zvoľme bod G ľubovoľne na úsečke AD. Ďalej označíme X pätu kolmice z bodu A na priamku BG a Y pätu kolmice z A na CG. Dokážte, že body B, C, X, Y ležia na kružnici.

2.7 Krásna Modrooká Snehulienka

kategórie **alfa** a **beta**

Žirafka Laura sa prechádzala po svojom žirafom zámku a obzerala si svoju zbierku zrkadiel. Keď si spomenula na svoju obľúbenú rozprávku o Snehulienke, tak neodolala a opýtala sa: „Zrkadielko, zrkadielko, povedz mi, kto je najkrajší na svete?“ Kupodivu jedno zo zrkadiel žirafke Laure spokojne odpovedalo: „No predsa Miško!“ To žirafku Lauru úplne vyviedlo z miery až tak, že výraz jej tváre stál za samostatnú úlohu.

Majme výraz $n^4 + k$, kde n, k sú celé kladné čísla. Dokážte, že existuje nekonečne veľa čísel k takých, že pre všetky čísla n je daný výraz zložené číslo.

2.8 Kropíme Matúša Skúsenosťami

kategória **beta**

Žirafky šli spokojne lesom, keď tu zrazu na nich vybehol nebezpečný Matúš, ktorého sa boja celé okolie. Žirafky začali utekať. Našťastie nabrali veľa skúseností z hororov a vedeli, že najlepšie, čo môžu spraviť, je rozdeliť sa. A tak sa začali zamýšľať nad delením.

Pre kladné celé číslo n značí $d(n)$ počet rôznych deliteľov čísla n (vrátane 1 a n). Nech $a > 1$ a $m > 0$ sú celé čísla také, že $a^m + 1$ je prvočíslo. Dokážte, že potom $d(a^m - 1) \geq m$.

2.9 Kradneme Modernú Skrinku

kategória **beta**

*Úloha bola preformulovaná – namiesto pôvodnej formulácie „**Predpokladajme, že žirafky hrajú optimálne. V závislosti od začínajúcej žirafky rozhodnite, či má hra koniec, a ak áno, kto má víťaznú stratégiu.**“ je použitá „**V závislosti od začínajúcej žirafky rozhodnite, či má niektorá žirafka víťaznú stratégiu (t. j. vie vyhrať bez ohľadu na to, ako budú hrať ostatné žirafky) a ak áno, ktorá.**“*

V malej dedinke menom Európa boli tri žirafky, Červená, Zelená a Modrá. Jedného dňa zbadali obrovské lietadlo, ktoré sa rútilo k zemi. Ani chvíľu neváhali a okamžite bežali na miesto pádu. Bohužiaľ, nikto z pasažierov neprežil (pasažieri boli samozrejme len plyšové zvieratká). Rozhodli sa preto vypátrať čiernu skrinku a prísť na dôvod pádu lietadla.

Keď sa im ju podarilo nájsť a otvoriť, našli v nej len 31 červených, 41 zelených a 59 modrých kameňov. Tri žirafky sa rozhodli zahrať si nasledujúcu hru. Žirafky sa postupne striedajú v ťahoch v poradí Červená, Zelená a Modrá a každá žirafka môže urobiť jeden z nasledujúcich ťahov:

- vybrať tri kamene rovnakej farby zo skrinky, alebo
- vymeniť dva kamene rôznej farby v skrinke za dva kamene ostávajúcej farby (žirafky majú dostatočnú zásobu kameňov z každej farby).

Hra končí, keď všetky kamene v skrinke majú rovnakú farbu. Víťazom sa stáva tá žirafka, ktorej meno sa zhoduje s farbou kameňov v skrinke. V závislosti od začínajúcej žirafky rozhodnite, či má niektorá žirafka víťaznú stratégiu (t. j. vie vyhrať bez ohľadu na to, ako budú hrať ostatné žirafky) a ak áno, ktorá.

2.10 Kráčam Mojou Školou

kategória **beta**

Žirafka Lukáš sa chcela niečomu novému priučiť, a tak pobehovala po výške a hľadala prednášku o úvode do planimetrie. Žirafku Teri to zaujalo a začala si všímať zaujímavé vlastnosti. Otvorila GeoGebru a išla si celú situáciu zakresliť.

Majme rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AC. Nech P je ľubovoľný bod na výške na stranu AC. Kružnica opísaná trojuholníku ABP pretína úsečku AC druhýkrát vo vnútornom bode M. Nech N je taký bod na úsečke AC, že $|AM| = |NC|$ a $M \neq N$. Druhý priesečník priamky NP s kružnicou opísanou APB označme X a druhý priesečník priamky AB a kružnice opísanej APN označme Y. Dotyčnica v bode A ku kružnici opísanej APN pretína výšku na stranu AC v bode Z. Dokážte, že priamka CZ je dotyčnicou ku kružnici opísanej PXY.