



Zadania 3. kola letnej časti

Termín odoslania 2. máj 2023 (pre zahraničie 29. apríl 2023)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

3.1 Krátiť Minúty Spoločne ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Vedúci KMSka idú na sústredko. Ich cesta začala na stanici v Bratislave. S rukami plnými eráru zistili, že zabudli, kedy im odchádza vlak. Neboli by to ale vedúci matematického seminára, keby si aspoň jeden z nich nepamätal čas odchodu vlaku na sústredko pomocou matematickej úlohy.

Vedúci vedia, že v čase, keď odchádza vlak, sú hodinová a minútová ručička presne oproti sebe na jednej priamke. A vlak na sústredko odchádza niekedy medzi štrnástou a pätnástou hodinou. Ak sa hodinová ručička hýbe rovnomerne, kedy odchádza vlak na sústredko?

3.2 Krúžime Medzi Stanicami ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Na nástupišti čakal na vedúcich vlak, ktorý ich mal okružnou cestou cez Margecany zavieť až do Brezna. Vedúci stlačili tlačidlo na dverách vlaku, ale dvere nič. Tak ho stlačili znova, ale dvere znovu nič. Po treťom pokuse dvere začali pomaličky spolupracovať. Kým sa dokorán otvorili, aby vedúci mohli nastúpiť, sa Šteška zamyslela nad tvarom tlačidla na otváranie dverí.

Šesťuholník $ABCDEF$ má nasledujúce 3 vlastnosti:

1. diagonály AC , CE a EA majú rovnakú dĺžku,
2. uhly ABC a CDE sú pravé,
3. dĺžky strán šesťuholníka sú navzájom rôzne celé čísla.

Aký je najmenší možný obvod šesťuholníka, ak má diagonála AC dĺžku $\sqrt{85}$?

3.3 Kamaráti Musia Sedieť ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa** a **beta**

Keď vedúci konečne vošli do vlaku, zistili, že ich vozeň má 100 sedadiel očíslovaných číslami 1 až 100, ktoré sú rozmiestnené do mriežky 10×10 . Dokážte, že Mati a Danko si vedľa seba sadnúť na 2 susediace sedadlá (vedľa seba alebo tesne za sebou), ktorých čísla majú rozdiel aspoň 6, bez ohľadu na to, ako sú sedadlá očíslované.

3.4 Komparzistov Motivačiek Stanovujeme ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Keďže sa už vedúci usadili, môžu si zosumarizovať dej a rozdeliť dejové postavy. Keď si ich však rozdelili rovným dielom, zistili, že každý ich bude v jednom momente stvárňovať dve.

Nájdite všetky celé nezáporné čísla a, b také, že $a^2 = b \cdot (b + 7)$.

3.5 Kontrolu Maximalizujeme Sklonom ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Vedúci by radi mali prehľad o tom, kde vo vlaku sedia ktorí účastníci. Na to je potrebné pozeráť sa na nich pod správnym uhlom. Na niektorých pod 60-stupňovým, na iných pod 45-stupňovým. Pomôžte im nájsť všetky potrebné uhly.

V trojuholníku ABC zvolíme bod D na strane BC tak, aby $|BD| = 2 \cdot |CD|$. Vieme, že $|\sphericalangle BDA| = 60^\circ$ a $|\sphericalangle BCA| = 45^\circ$. Určte veľkosť uhla ABC .

3.6 Ktorého Magora Stena

kategórie **alfa** a **beta**

Ako vedúci a účastníci prechádzali ponad Poprad¹ a popod Tatry, tešili sa na krásne výhľady. Neprijemne ich preto prekvapila protihluková stena, ktorá sa stále zvyšovala a stále viac a viac im uberala z výhľadu na malebné hory a slnečný svit aj Svit. Začalo ich preto zaujímať, akú funkciu má taká vysoká protihluková stena a aká najmenej vysoká musela byť.

Nech f je funkcia z kladných celých čísel do kladných celých čísel spĺňajúca

1. $f(ab) = f(a)f(b)$ pre všetky celé kladné čísla a, b ,
2. $f(a) < f(b)$ pre všetky $a < b$,
3. $f(3) \geq 7$.

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu, ktorú môže nadobúdať $f(3)$.

3.7 Kým Margecany Sprechodnia

kategórie **alfa** a **beta**

Vlak zastavil v Margecanoch, kde všetkých cestujúcich vysadili z vlaku, pretože na koľajnici sa vysypal piesok, a tak nemohli pokračovať v ceste, kým sa neodprace. Vedúci sa preto rozhodli, že kým budú čakať na odpratanie piesku z koľajníc, tak si na parkovisku pred stanicou spolu s účastníkmi zatancujú.

Dievčatá aj chlapci sa zoradili podľa výšky, pochytili sa za ruky a vytvorili páry tak, že najvyššie dievča bolo s najnižším chlapcom, druhé najvyššie s druhým najnižším a tak ďalej. Potom spustili hudbu a všetky páry začali spolu mocne tancovať. Nikto nevedel predpovedať, k čomu toto jašenie povedie, výsledok mohol byť úplne akýkoľvek.

Dokážte, že ľubovoľné kladné celé číslo sa dá vyjadriť v tvare

$$3^{u_1} \cdot 2^{v_1} + 3^{u_2} \cdot 2^{v_2} + \dots + 3^{u_k} \cdot 2^{v_k},$$

kde k je kladné celé číslo a $u_1 > u_2 > \dots > u_k \geq 0$ a $0 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_k$ sú nezáporné celé čísla.

3.8 Kmsáci Margecany spratávajú

kategória **beta**

Vedúci dotancovali, ale piesok ešte nebol z trate odprataný, a tak sa ho všetci cestujúci rozhodli ísť odpratávať. Odpratávali ho svorne zrnko po zrnku. Niektoré zrnká išli ľahšie a zvládol ich odpratať samotný cestujúci, s inými si však museli poradiť aj viacerí. Keď už bol všetok piesok odprataný, vlakvedúci chcel oceniť najusilovnejších odpratávačov. Na to by však o každom z nich musel vedieť, akú množinu zrníek piesku odpratal.

¹rieku

Majme sto množín. V každom kroku si vie vlakvedúci vybrať dve množiny a zistiť ich prienik aj zjednotenie. Nájdite najmenší možný počet krokov, na ktorý vie vlakvedúci zistiť presný obsah všetkých množín.

3.9 Keď Matematika Sedí

kategória **beta**

- Koľko je hodín?
- Deväť.
- Z ktorej koľaje odchádza náš vlak?
- Deväť?
- V ktorom vozni máme miestenky?
- Deväť.
- A v ktorom kupé?
- Deväť?
- Aké číslo má úloha „Majme rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC . Vezmime si ľubovoľný bod X vnútri úsečky BC . Ďalej nech Y, Z sú postupne body vnútri ramien AB, AC spĺňajúce $|\sphericalangle BXY| = |\sphericalangle ZXC|$. Rovno-bežka k YZ prechádzajúca bodom B pretne priamku XZ v bode T . Ukážte, že AT je osou $\sphericalangle BAC$.“?

Ako ste isto pochopili, vyriešte úlohu číslo deväť.

3.10 Krkolomne Mocnia Strojvodcovia

kategória **beta**

Keď vlak konečne dorazil do Brezna, vedúci nelenili ani chvíľu a začali vykladať erár von z vlaku. Viktor zdvihol zrak, že znesie Stana dole, ale tu si všimol, že sa mu vzdaluje! Vlak sa začal spolu so zvyškom eráru a účastníkmi rozbiehať zo stanice von. To však Jožko nemohol nechať len tak. Našiel núdzovú brzdu, silne za ňu zatiahol a vlak sa prudko zastavil. Všetkým účastníkom (a eráru) sa podarilo šťastlivo vystúpiť von z vlaku. Avšak teraz musia chudáci strojvodcovia odbrzdiť vlak. To sa robí tak, že nahromadený tlak v brzdách sa postupne uvoľňuje. A ako inak než odmocňovaním.

Pre každé $n \geq 1$ definujeme

$$a_n = 2 - \frac{1}{n^2 + \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}}.$$

Dokážte, že suma $\sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_{119}}$ je prirodzené číslo.