



Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 45. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľakov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO).

Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chcú by uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený seminár iKS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korespondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Bližšie informácie o ňom nájdete na stránke www.iksco.org.

Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese kms@kms.sk, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch kôl úloh. Zadania jednotlivých kôl nájdete na stránke <https://kms.sk/ulohy/> vždy aspoň mesiac pred termínom odovzdania daného kola. Úlohy 1 až 8 budú obodované počtom bodov od 0 po 9, úlohy 9 a 10 počtom bodov od 0 po 10. Okrem toho v niektorých špeciálnych prípadoch (popísané nižšie) môžu byť úlohy obodované aj od 0 po 5.

Body sa udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každé kolo sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel/-a, ktoré úlohy môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient κ . Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $\kappa = r + u + c$. Číslo r je tvoj ročník, číslo u je počet tvojich úspešných semestrov a číslo c je počet tvojich úspešných účastí na celoštátnom kole Matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas

neho podarilo získať aspoň 90 bodov alebo si sa zúčastnil/-a sústredenia. Tvoj ročník je prepočítavaný podľa počtu rokov do maturity tak, aby maturant mal ročník 4, teda napr. prváci 5-ročného štúdia majú ročník 0.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti, ktorí neboli úspešnými riešiteľmi celoštátneho kola Matematickej olympiády a ktorých koeficient κ je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci študenti. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavajú až po kole, v ktorom pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené úlohy 1 až 7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $\kappa \leq 2$. Ostatné úlohy (3 až 7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

Kategória BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené úlohy 3 až 10. Úlohu číslo 3 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 5$, ale dostanú za ňu najviac 5 bodov (popísané nižšie). Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 5$ a úlohu číslo 5 len študenti s $\kappa \leq 8$. Ostatné úlohy (6 až 10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

Riešenia za 5 bodov

Koeficient κ určuje, ktoré úlohy môže riešiteľ súťažne riešiť (ostatné úlohy môže riešiť tiež, no nebudú zarátané do výsledného poradia). Okrem toho môže riešiteľ za najviac 5 bodov riešiť nasledujúce úlohy, aj keď mu to koeficient nedovoľuje:

- úloha s najvyšším poradovým číslom, ktorú koeficient riešiteľovi nedovoľuje riešiť
- úloha číslo 4

Napríklad:

- riešiteľ s koeficientom 5 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 a 2, v úlohe 3 vie získať 5 bodov, v úlohách 4 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohách 9 a 10 vie získať po 10 bodov
- riešiteľ s koeficientom 9 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 až 3, v úlohách 4 a 5 vie získať po 5 bodov, v úlohách 6 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohách 9 a 10 vie získať po 10 bodov

Bodovanie týchto úloh funguje tak, že opravovateľ ohodnotí úlohu od 0 po 9 bodov ako zvyčajne, ale riešiteľovi sa do súčtu bodov z nej započíta len polovica bodov zaokrúhlená nahor.

Pozývanie na sústredenia

Po každej časti, zimnej aj letnej, sa uskutočnia **dve** sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 36 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci. V rámci jednej časti je možné zúčastniť sa najviac jedného sústredenia.

Keďže sústredenie kategórie ALFA je určené najmä pre študentov 9. ročníka základnej školy až 3. ročníka strednej školy a sústredenie kategórie BETA je určené najmä pre stredoškolských študentov, vyhradujeme si právo s prihliadnutím hlavne na ročník úspešného riešiteľa pozvať ho na sústredenie inej kategórie, resp. nepozvať ho.

Pokyny pre riešiteľov

- Úlohy rieš **samostatne**.
- Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu, prípadne odkaz na internetovú stránku, ak si čerpal z internetu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletne riešenie. Riešenie musí byť explicitné (pochopteľné samo o sebe bez ďalších zdrojov) a musí byť skontrolovateľné (v rozumnom čase) ručne opravovateľom (napríklad riešenia využívajúce výpočtovú techniku obvykle ručne skontrolovateľné nie sú).
- Odporúčame Ti pozrieť stránku Ako riešiť úlohy v KMS na adrese www.kms.sk/ako_riesit/, kde nájdeš niekoľko užitočných rád.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania kola. Ak posielaš riešenia poštou z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Riešenia neodovzdávajte organizátorom osobne.
- Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4. Ku každej úlohe uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú okrem riešení v slovenčine aj riešenia v angličtine, češtine a riešenia písané v \TeX u. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Na našej stránke www.kms.sk/template si môžeš stiahnuť a vytlačiť predlohy pre riešenia.
- Riešenia píš čitateľne. Ak nebudeme schopní prečítať časť tvojho riešenia, vyhradzuje si právo neudelit ti za tú časť body. Môžeš zvážiť písanie riešenia na počítači.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia nájdeš po prihlásení pod zadaním úlohy na našej stránke.
- Po termíne kola môžeš na našej stránke nájsť návody, príp. aj videonávody, ktoré ti pomôžu (nesúťažne) doriešiť úlohy, s ktorými si mal/-a problém. Následne tam zverejníme aj vzorové riešenia.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr sťažnosť na e-mailovú adresu kms@kms.sk spolu s oskenovaným riešením v prílohe. Žiadosť môžeš poslať aj písomne na našu adresu, ktorú nájdeš v hlavičke letáku. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na kms@kms.sk.

Elektronické posielanie riešení

Svoje riešenia môžeš odovzdať aj v elektronickej podobe na našej stránke. Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš na stránke www.kms.sk/eriesenia. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania kola o **23:59**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.

- Akceptované sú **iba riešenia vo formáte pdf** písané na počítači, prípadne naskenované, **pre každú úlohu jeden súbor**. Pri ich tvorbe odporúčame použiť \TeX alebo export do formátu pdf z iných aplikácií. Môžeš pritom využiť predlohy, ktoré nájdeš na našej stránke www.kms.sk/template. Ak posielaš oskenované riešenie, daj si pozor, či nie je príliš tmavé a či je čitateľné.
- Nezabudni v hlavičke riešenia uviesť svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Pokiaľ na našej stránke vyplníš všetky potrebné údaje (pozri si návod na www.kms.sk/eriesenia), nemusíš posilať poštou papierovú návratku.

Prijatie na FMFI UK bez prijímačiek

Ak účastník získa v niektorej časti (zimnej, letnej) a ľubovoľnej kategórii KMS aspoň 65% celkového počtu bodov, a hlási sa na študijný program, ktorého profilovým predmetom je matematika, bude prijatý.

Ba čo viac, ak dosiahne excelentné výsledky a dostane za to Dekanský list, v prípade, že príde študovať na FMFI UK, čaká naňho motivačné štipendium vo výške približne 300 eur.

.....TU ODSTRIHNI.....

Prihláška do zimnej časti KMS 2023/2024 – poslať spolu s 1. kolom!

Meno a priezvisko: Dátum narodenia:
 Škola:
 Rok maturity: Trieda:
 Počet účastí na celoštátnom kole MO:
 Adresa domov:
 Adresa pre poštu (domov – škola – iná):
 Tel. domov: mobil (vlastný):
 e-mail:

Svojím podpisom dávam podľa § 11 a nasl. zákona č. 122/2013 Z.z. o ochrane osobných údajov svoj výslovný súhlas so správou, spracovaním a uchovaním svojich osobných údajov, ktoré poskytujem občianskemu združeniu Trojsten. Poskytujem dobrovoľné údaje s tým, že tieto údaje môžu byť spracované pre (i) ich interné využitie v rámci občianskeho združenia Trojsten za účelom vyhodnotenia uchádzačov o program (ii) za účelom vytvárania databázy uchádzačov pre účely ďalšej spolupráce so študentom. Beriem na vedomie a súhlasím s tým, že Trojsten môže moje údaje dlhodobo uchovávať a spracúvať za účelom poskytovania študentských príležitostí alebo iných odborných alebo spoločenských aktivít občianskeho združenia Trojsten. Súhlas je daný na dobu nevyhnutnú na dosiahnutie účelu spracovania a je ho možné kedykoľvek písomne odvolať.

Podpis:

Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 25. september 2023 (pre zahraničie 22. september 2023)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

1.1 Kojenecké Močenie Spodkov ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Na ktorú ukrajinskú rieku sa nedá spoľahnúť pri čistení oblečenia, pretože je príliš plytká? Na Dneper.

Starostlivý otecko musel oprat' plátene plienky v silnom bielidle. Teraz chce plienky prepláchnuť, aby v nich zostala iba malá koncentrácia bielidla. Zo svojich dlhoročných skúseností už vie, že keď plienky žmýka, zostane v nich práve pol litra tekutiny. Preto plienky prepláchol nasledovne: Po tom, ako ich opral v čistom bielidle, ich riadne vyžmýkal, následne ich strčil do vane s 12 litrami čistej vody a riadne ich v nej zamiešal tak, že sa koncentrácia bielidla v plienkach a vo zvyšku vody vyrovnala. Znova ich vyžmýkal a vodu z vane vypustil. Nakoniec napustil do vane 8 litrov čistej vody a plienky v nej zas riadne premiešal, čím zredukoval koncentráciu bielidla na $\frac{1}{k}$. S tým už bol spokojný. Nájdite k .

1.2 Kalendár Mayských Súhvezdí ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Čo americkí domorodci oslavujú na Sviatok práce? Prvého Maya.

Nájdite všetky riešenia násobenia pod sebou tak, aby na mieste každej hviezdičky bola práve jedna cifra a žiadna z vedúcich cifier nebola nulová:

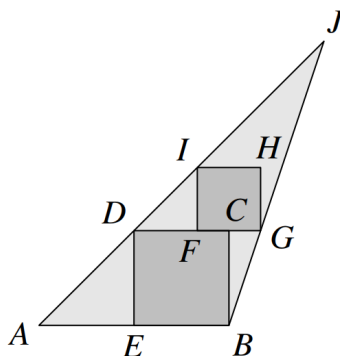
$$\begin{array}{r} \\ \times \\ \hline * \\ 3 \\ * \\ \hline * \end{array}$$

1.3 Krabice Máme Skryté ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa** a **beta**

Krab chcel zbalit' krabicu, no už nemal žiadnu voľnú...

Štvorce $BCDE$ a $FGHI$ sú v trojuholníku ABJ tak ako na obrázku 3.1, pričom bod E je stred strany AB , C je stred strany FG , body D a I ležia na strane AJ , bod G leží na strane BJ a bod F leží na strane CD . Akú časť trojuholníka ABJ tvorí štvorec $BCDE$?



Obrázok 3.1: Zbalené krabice

1.4 Koniec Mrzutého Sváru ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

Frázu „nájsť obdĺžnik“ v pôvodnej verzii zadania sme nahradili jasnejším vysvetlením.

Prečo dokázal byť Istanbul takým vojensky významným bodom? Bo spor.

Bospor a Dardanely sa striedali v ofarbovaní šachovnice veľkosti 7×3 . Bospor ofarboval políčka červenou a Dardanely modrou. Dokážte, že po ofarbení všetkých políčok vieme nájsť také 4 políčka rovnakej farby, ktoré tvoria obdĺžnik (teda ich stredy sú vrcholy pravouhlého rovnobežníka) so stranami rovnobežnými s mriežkou šachovnice.

1.5 Kolobeh Mokrých Skúmaviek ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Prečo skúmavka rýchlo zabúda na svoje problémy s konzumáciou? Sa jej to všetko zleje.

Máme dve rozlíšiteľné skúmavky s objemom n a k , kde n a k sú celé kladné čísla. Obe skúmavky sú na začiatku prázdne a máme neobmedzené množstvo vody. V jednom kroku môžeme:

- vyprázdniť ľubovoľnú skúmavku,
- naplniť ľubovoľnú skúmavku doplna alebo
- preliať vodu z jednej skúmavky do druhej, pričom sa preleje vždy najviac, ako sa dá (limitovaní sme vodou v skúmavke, z ktorej leje, a kapacitou skúmavky, do ktorej leje).

V závislosti od n a k určte počet rôznych konfigurácií, ktoré je možné dosiahnuť. Dve konfigurácie sú rôzne, ak niektorá zo skúmaviek obsahuje v jednej konfigurácii iné množstvo vody ako v druhej.

1.6 Klub Morských Sépií

kategórie **alfa** a **beta**

Klep, klep, kto tam a čo sa tam deje? Tady sé pije.

V zálive v Karibskom mori stredoziemskom žije n sépií, kde $n \geq 4$. Každá sépia má medzi zvyšnými nejaké kamarátky, pričom kamarátstva sú vzájomné. Občas sépie chytí nutkanie pochytať sa za ramená do kruhu. Každá sépia má dve ramená, každým môže chytiť nejakú inú sépiu za jej rameno. Žiadne dve sépie sa nechcú držať, pokiaľ nie sú kamarátky.

Vieme, že v zálive pre každé celé m také, že $2 < m < n$, sa ku každým m sépiám, ktoré sa dokážu pochytať za ramená do kruhu, vie pridať nejaká zo zvyšných sépií tak, aby sa vzniknutá $(m + 1)$ -tica opäť vedela pochytať za ramená do kruhu. To však nemusí znamenať, že nová sépia sa vie do kruhu priamo pridať, je možné, že sa ostatné sépie budú musieť nejakým spôsobom preusporiadať.

Jedného dňa sépia Septima (jedna spomedzi našich n sépií) prišla do zálivu, kde našla niekoľko sépií (aspoň tri, ale nevieme presne koľko), ako sa držia za ramená do kruhu (bez nej).

Dokážte, že pre každé m , kde $2 < m < n$, existuje m -tica sépií, ktoré sa dokážu držať do kruhu za ramená.

1.7 Kvartický Mnohočlen Schovaný

kategórie **alfa** a **beta**

Prečo sa polynóm rád vracia k osi x ? Lebo tam má svoje korene.

Majme polynóm $P(x)$ štvrtého stupňa s reálnymi koeficientami taký, že pre všetky reálne čísla x platí $P(x) \geq x$ a navyše $P(1) = 1$, $P(2) = 4$ a $P(3) = 3$. Nájdite všetky také polynómy $P(x)$.

1.8 Kolmíc Miesto Stretu

kategória **beta**

Prečo sa chce kružnica vpísaná hrať s trojuholníkom? Lebo je do neho.

V trojuholníku ABC označme D priesečník osi uhla BAC a strany BC . Os úsečky AD pretína osi uhlov CBA a ACB postupne v bodoch K a L . Dokážte, že stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC je priesečníkom výšok trojuholníka KLD .

1.9 Kardinalita Množiny Štvorcová

kategória **beta**

Aké formácie tvoria muchy prenášajúce spavú chorobu? Štvor-tse.

Nech n je kladné celé číslo. Uvažujme počet usporiadaných dvojíc kladných celých čísel (a, b) takých, že číslo

$$\frac{ab}{a+b}$$

je celé a delí n . Ukážte, že pre všetky n je tento počet druhou mocninou celého čísla.

1.10 Kraje Malej Sféry

kategória **beta**

Na ktorú rieku si spomenieš po prečítaní takto vyzerajúceho zadania?

„Nech a, b a c sú nezáporné reálne čísla také, že $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokážte, že

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a}{1+a^4} + \frac{b}{1+b^4} + \frac{c}{1+c^4} \leq \frac{9\sqrt{3}}{10}$$

a určte, kedy v nerovnostiach nastáva rovnosť.“

Uh.