



Zadania 3. kola zimnej časti

Termín odoslania 20. november 2023 (pre zahraničie 17. november 2023)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

3.1 Kus Medeného Smetia ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Uvažujme ideálny medený drôt o trojcifерnej dĺžke $N = \overline{abc}^1$ metrov. Ak ho vo vákuu rozdelíme na b rovnako dlhých častí, každá bude mať dĺžku $\overline{cb}$. Experimentálne sme overili, že b aj $\overline{cb}$ sú prvočísla. Vyčíslite dĺžku drôtu v metroch.

3.2 Kvadrátmi Meriame Siemensy ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Ak súčet odporov dvoch strán trojuholníka vynásobíme odporom tretej strany, dostaneme výsledok $96 \Omega^2$. Ak túto operáciu urobíme aj pri ostatných dvoch spôsoboch výberu prvej a druhej strany, dostaneme výsledky 91 a $75 \Omega^2$. Určte súčet odporov strán trojuholníka, ak odpor strany je vždy kladné reálne číslo.

3.3 Klbko Medených Stružlín ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa** a **beta**

Z drôtu vieme vyrobiť drôtenku práve vtedy, keď pre dvojicu kladných celých čísel (n, k) platí, že $n \mid k^2 + 1$ a zároveň $n \mid (k + 1)^2 + 1$. Určte všetky dvojice (n, k) , pre ktoré sa dá z drôtu vyrobiť drôtenka.

3.4 Kúsok Milej Stereometrie ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa** a **beta**

V laboratóriu je vtákopysk, ktorý robí mnohé nebezpečné experimenty. My sa obmedzíme na bezpečnejšie priestorové pokusy.

K dispozícii máme dva nástroje. *Gulidlo* pre zadané body A, B zostrojí guľu so stredom A , ktorá má na povrchu bod B . *Rovínitko* pre tri zadané body, ktoré neležia na jednej priamke, zostrojí rovinu, ktorá prechádza týmito bodmi.

- V priestore je zadaná rovina a bod, ktorý na nej neleží. Nájdite spôsob, ako zostrojiť priamku kolmú na zadanú rovinu, prechádzajúcu zadaným bodom. Priamku p a rovinu π nazývame navzájom kolmými, ak je priamka p kolmá na dve ľubovoľné rôznobežné priamky ležiace v rovine π .
- Pre dve zadané roviny skonštruujte ich rovinu súmernosti. Rovina súmernosti je množina bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od oboch rovín. Vzdialenosť bodu X od roviny π je vzdialenosť bodu X od najbližšieho bodu roviny π .
- V priestore je zadaný štvorsten. Skonštruujte jemu vpísanú guľu. Guľa vpísaná štvorstenu je taká guľa, ktorá má s každou jeho stenou spoločný práve jeden bod.

¹Značenie $\overline{xyz}$ označuje číslo zložené z cifier x, y, z v desiatkovej sústave v danom poradí.

Nezabudnite aj dokázať správnosť vašej konštrukcie.

3.5 Kukáme Mikroskopom Svetelným ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa** a **beta**

Unavený Féro sa nudí, a tak sa pozerá na polarizáciu fotónov. Polarizácia je kvantový jav, ktorý môže skolabovať do horizontálneho alebo vertikálneho stavu s rovnakou pravdepodobnosťou. Teda funguje ako férová minca. Féro si povedal, že skončí, keď dvakrát po sebe uvidí vertikálne polarizované fotóny. V závislosti od n určte, aká je pravdepodobnosť, že skončí po pozretí sa na presne n fotónov.

3.6 Kváder Môžeme Skúmať

kategórie **alfa** a **beta**

Majme štvordimenzionálny kváder s kladnými reálnymi rozmermi $a \times b \times c \times d$. Experiment bude fungovať práve vtedy, keď bude platiť, že

$$(a + b + c + d) \cdot \left(\frac{1}{b + 2c + d} + \frac{1}{c + 2d + a} + \frac{1}{d + 2a + b} + \frac{1}{a + 2b + c} \right) \geq 4.$$

Dokážte, že experiment bude fungovať vždy.

3.7 Kopec Masívnej Sily

kategórie **alfa** a **beta**

V ostrouhlom trojuholníku ABC nech vektor sily má počiatok v bode C a končí v bode F , ktorý je päťou výšky na strane AB . Nech M je ťažisko² strany AC . Ak platí, že $|BM| = |CF|$ a $|\angle MBC| = |\angle FCA|$, dokážte, že trojuholník ABC je rovnostranný.

3.8 Konvolúcia Množstva Šošoviek

kategória **beta**

Šošo má na stole 2 šošovky. Každú minútu na stôl pridá šošovky v počte najväčšieho prvočíselného deliteľa počtu šošoviek doteraz vyložených na stole. Nájdite všetky prirodzené m také, že v nejakej minúte bude počet šošoviek na stole práve m^2 .

3.9 Kirchhoffa Musíme Splniť

kategória **beta**

Baška poskladala elektrický obvod pozostávajúci z niekoľkých uzlov, kde niektoré dvojice uzlov sú spojené vodičom. Navyše každý vodič je súčasťou nejakého štvoruholníka pozostávajúceho zo 4 uzlov pospájaných vodičmi „do kruhu“.³ Dokáže Baška v každom obvode, ktorý spĺňa túto vlastnosť, nastaviť elektrický prúd tak, aby každým vodičom prechádzal prúd veľkosti 1, 2, 3 alebo 4 ampére (pričom prechádzať môže vodičom v ľubovoľnom smere)? Samozrejme, v každom uzle musí platiť prvý Kirchhoffov zákon – súčet veľkostí prúdov doňho vchádzajúcich musí byť rovný súčtu veľkostí prúdov z neho vychádzajúcich.

²stred

³čiže ak uvažovaný vodič je medzi uzlami a, b , tak existujú uzly c, d také, že dvojice uzlov (a, b) , (b, c) , (c, d) , (d, a) sú všetky pospájané vodičmi

3.10 Kosé Mám Štvorce

kategória **beta**

Krtko sa nachádzal v konzervatívnom poli, v ktorom sa prechádzal po svojich obľúbených chodníčkoch. Po chvíli zastal a uvedomil si, že práca, ktorú pole vykonalo, je nulová. Po bližšej analýze svojej trasy zistil, že je to preto, že išiel po obvode kosoštvorca.

Majme trojuholník ABC . Jeho vpísaná kružnica so stredom I sa dotýka strán AB a AC postupne v bodoch E , F . Označme M a N postupne ťažiská kružníc opísaných trojuholníkom AIC a AIB . Vedme z bodu M dotyčnice ku kružnici vpísanej trojuholníka ABC , ktoré sa jej dotýkajú v bodoch K , G . Analogicky vedme aj z bodu N , ktoré sa dotýkajú zas v bodoch J , L . Priamky KG a JL sa pretínajú v bode X . Dokážte, že $EFXI$ je kosoštvorec.