Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 45. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO).

Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený seminár *i*KS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korespondenčního semináře. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Bližšie informácie o ňom nájdete na stránke `www.iksko.org`.

Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`. Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

*vaši organizátori*

# Pravidlá

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Každá časť pozostáva z troch kôl úloh. Zadania jednotlivých kôl nájdeš na stránke `https://kms.sk/ulohy` vždy aspoň mesiac pred termínom odovzdania daného kola. Úlohy 1 až 8 budú obodované počtom bodov od 0 po 9, úlohy 9 a 10 počtom bodov od 0 po 10. Okrem toho v niektorých špeciálnych prípadoch (popísané nižšie) môžu byť úlohy obodované aj od 0 po 6 bodov, resp. od 0 po 3 body.

Body sa udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každé kolo sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

## Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel/-a, ktoré úlohy môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient $\kappa$. Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $\kappa = \min(k, 1) + c + u$, kde

- $k$ je počet tvojich úspešných účastí na krajskom kole Matematickej olympiády kategórie A, B alebo C pred začiatkom aktuálneho školského roka (keďže vo výpočte $\kappa$ sa berie menšia z hodnôt $k$ a 1, po tvojej prvej úspešnej účasti už žiadna ďalšia koeficient nezvýši),
- $c$ je počet tvojich úspešných účastí na celoštátnom kole Matematickej olympiády pred začiatkom aktuálneho školského roka a

$u$ je počet tvojich úspešných semestrov (semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať v niektorej kategórii aspoň 90 bodov alebo si sa zúčastnil/-a sústredenia).

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti, ktorí neboli úspešnými riešiteľmi celoštátneho kola Matematickej olympiády a ktorých koeficient $\kappa$ je najviac 2.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci študenti. Riešitelia, ktorí môžu riešiť ALFU, sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po kole, v ktorom pošlú aspoň jednu z úloh 9 alebo 10.

**Kategória ALFA**

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené úlohy 1 až 8. Úlohy číslo 1 a 2 môžu za plný počet bodov riešiť len študenti s $\kappa \leq 0$ a úlohu číslo 3 len študenti s $\kappa \leq 1$. Ostatné úlohy (4 až 8) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

**Kategória BETA**

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené úlohy 3 až 10. Za úlohy 3 a 4 nie je v kategórii BETA možné získať plný počet bodov, dajú za riešiť za maximálne 3, resp. 6 bodov (popísané nižšie). Úlohu číslo 5 môžu za plný počet bodov riešiť len študenti s $\kappa \leq 6$. Ostatné úlohy (6 až 10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

Pre prehľadnosť uvedieme koeficientové hranice aj v tabuľke.

| Číslo úlohy | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\kappa \leq$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 | – | – | – | – | – |

## Riešenia za 3 a 6 bodov

Koeficient $\kappa$ určuje, ktoré úlohy môže riešiteľ súťažne riešiť za plný počet bodov. Okrem toho môže riešiť aj

- úlohu s najvyšším poradovým číslom, ktorú mu koeficient nedovoľuje riešiť, pričom za riešenie dostane dve tretiny získaného počtu bodov zaokrúhlené na najbližšie celé číslo (čiže najviac 6) a
- úlohu s druhým najvyšším poradovým číslom, ktorú mu koeficient nedovoľuje riešiť, pričom za riešenie dostane tretinu získaného počtu bodov zaokrúhlenú na najbližšie celé číslo (čiže najviac 3).

V kategórii BETA navyše úlohu 3 nemožno riešiť za 6 ani 9 bodov a úlohu 4 nemožno riešiť za 9 bodov (čiže akoby každý riešiteľ s $\kappa \leq 2$ mal vo výsledkovej listine BETY koeficient $\kappa = 3$). Napríklad

- riešiteľ s koeficientom 3 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 a 2, v úlohe 3 vie získať 3 body, v úlohe 4 vie získať 6 bodov, v úlohach 5 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohach 9 a 10 vie získať po 10 bodov,
- riešiteľ s koeficientom 7 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 až 3, v úlohe 4 vie získať 3 body, v úlohe 5 vie získať 6 bodov, v úlohach 6 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohach 9 a 10 vie získať po 10 bodov a
- riešiteľ s koeficientom 2 nemôže súťažne riešiť úlohu 1, v úlohe 2 vie získať 3 body, v úlohe 3 vie získať 6 bodov do kategórie ALFA a 3 body do kategórie BETA, v úlohe 4 vie získať 9 bodov do kategórie ALFA a 6 bodov do kategórie BETA, v úlohach 5 až 8 vie získať po 9 bodov do oboch kategórii a v úlohach 9 a 10 vie získať po 10 bodov do kategórie BETA.

Bodovanie týchto úloh funguje tak, že opravovateľ ohodnotí úlohu od 0 po 9 bodov ako zvyčajne, ale riešiteľovi sa do súčtu bodov z nej započíta len tretina, resp. dve tretiny bodov zaokrúhlené na najbližšie celé číslo.

## Pozývanie na sústredenia

Po každej časti, zimnej aj letnej, sa uskutoční aspoň jedno sústredenie pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Z každej z kategórii ALFA a BETA bude aspoň 24 najlepších riešiteľov pozvaných na niektoré z nich. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci. V rámci jednej časti je možné zúčastniť sa najviac jedného sústredenia.

Keďže sústredenie kategórie ALFA je určené najmä pre študentov 9. ročníka základnej školy až 3. ročníka strednej školy a sústredenie kategórie BETA je určené najmä pre stredoškolských študentov, vyhradzujeme si právo s prihliadnutím hlavne na ročník úspešného riešiteľa pozvať ho na sústredenie inej kategórie, resp. nepozvať ho.

## Pokyny pre riešiteľov

- Úlohy rieš **samostatne**.
- Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu, prípadne odkaz na internetovú stránku, ak si čerpal z internetu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie.
- Riešenie musí byť explicitné (pochopiteľné samo o sebe bez ďalších zdrojov) a musí byť skontrolovateľné (v rozumnom čase) ručne opravovateľom (napríklad riešenia využívajúce výpočtovú techniku obvykle ručne skontrolovateľné nie sú).
- Odporúčame Ti pozrieť stránku Ako riešiť úlohy v KMS[1], kde nájdeš niekoľko užitočných rád.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania kola. Ak posielaš poštou riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzujeme si preto právo udeliť za ne nula bodov.
- Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4. Ku každej úlohe uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú okrem riešení v slovenčine aj riešenia v angličtine a češtine. Veľmi nás potešia riešenia písané v TeXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Na našej stránke si môžeš stiahnuť a vytlačiť predlohy pre riešenia[2].
- Riešenia píš čitateľne. Ak nebudeme schopní prečítať časť tvojho riešenia, vyhradzujeme si právo neudeliť ti za tú časť body. Odporúčame písať riešenia na počítači.
- Po termíne kola môžeš na našej stránke nájsť vzorové riešenia, príp. aj videovzoráky[3], ktoré ti pomôžu pochopiť riešenia úloh, s ktorými si mal/-a problém.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia nájdeš po prihlásení pod zadaním úlohy na našej stránke.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr sťažnosť na e-mailovú adresu `kms@kms.sk`.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`.

[1] https://kms.sk/ako_riesit/
[2] https://kms.sk/template
[3] https://www.youtube.com/user/KorMatSem

## Elektronické posielanie riešení

Svoje riešenia odporúčame odovzdávať v elektronickej podobe na našej stránke. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania kola o 23:59. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú **iba riešenia vo formáte pdf** písané na počítači, prípadne naskenované, **pre každú úlohu jeden súbor**. Pri ich tvorbe odporúčame použiť TeX alebo export do formátu pdf z iných aplikácií. Môžeš pritom využiť predlohy, ktoré nájdeš na našej stránke `https://kms.sk/template`. Ak posielaš oskenované riešenie, daj si pozor, či nie je príliš tmavé a či je čitateľné.
- Nezabudni v hlavičke riešenia uviesť svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Pokiaľ na našej stránke vyplníš všetky potrebné údaje (pozri si návod na `https://kms.sk/eriesenia`), nemusíš posielať poštou papierovú návratku.

## Prijatie na FMFI UK bez prijímačiek

Ak účastník získa v niektorej časti (zimnej, letnej) a ľubovoľnej kategórii KMS aspoň 65% celkového počtu bodov, a hlási sa na študijný program, ktorého profilovým predmetov je matematika, bude prijatý.

Ba čo viac, ak dosiahne excelentné výsledky a dostane za to Dekanský list, v prípade, že príde študovať na FMFI UK, čaká naňho motivačné štipendium vo výške približne 300 eur.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Prihláška do letnej časti KMS 2023/2024 – **poslať spolu s 1. kolom!**
**Týka sa iba riešení posielaných poštou.**

Meno a priezvisko: .................................. Dátum narodenia: ..................................
Škola: ..........................................................................................
Rok maturity: .......................................... Trieda: ........................................
Počet účastí na celoštátnom kole MO: ............. Počet účastí na krajskom kole MO A, B, C: .............
Adresa domov: ...................................................................................
Adresa pre poštu (domov – škola – iná): ..........................................................
Tel. domov: .................................. mobil (vlastný): ..................................
e-mail: .........................................................................................

Svojím podpisom dávam podľa § 11 a nasl. zákona č. 122/2013 Z.z. o ochrane osobných údajov svoj výslovný súhlas so správou, spracovaním a uchovaním svojich osobných údajov, ktoré poskytujem občianskemu združeniu Trojsten. Poskytujem dobrovoľné údaje s tým, že tieto údaje môžu byť spracované pre (i) ich interné využitie v rámci občianskeho združenia Trojsten za účelom vyhodnotenia uchádzačov o program (ii) za účelom vytvárania databázy uchádzačov pre účely ďalšej spolupráce so študentom. Beriem na vedomie a súhlasím s tým, že Trojsten môže moje údaje dlhodobo uchovávať a spracúvať za účelom poskytovania študentských príležitostí alebo iných odborných alebo spoločenských aktivít občianskeho združenia Trojsten. Súhlas je daný na dobu nevyhnutnú na dosiahnutie účelu spracovania a je ho možné kedykoľvek písomne odvolať.

Podpis: ..........................................

# Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 19. február 2024 (pre zahraničie 16. február 2024)
V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

## 1.1 Kniežatstvo Metod Spravoval ($\kappa \leq 0$) kategória **alfa**

A cisár Michal riekol: „Metod, si človek bystrý a vzdelaný, bež ta, niekde severne od Solúna, spravovať slovanské kniežatstvo.“ A Metod sa tam vybral. Za svojej vlády sa však stretol s množstvom zmätkov a chaosu a pochopil, že nechce svoju dušu zmáčať v tejto svetskej temnote. Preto pri prvej príležitosti zdúchol. Vybral sa do kláštora na Olympe, kde sa s vervou oddával mníšskym radostiam a štúdiu.

Študoval napríklad 4-ciferné čísla $A = \overline{2X83}$, $B = \overline{19Y6}$, $C = \overline{29X6}$, $D = \overline{1Y54}$.[4] Určte všetky dvojice cifier $(X, Y)$ tak, aby čísla $A + B$ a $C - D$ boli obe deliteľné deviatimi.

## 1.2 Krásavice Miestne Striehnu ($\kappa \leq 0$) kategória **alfa**

Medzitým jeho mladší brat Konštantín (odvodené od slova konštanta) dostal príležitosť vybrať si svoju nastávajúcu. Miestne krásavice sa nachádzali vo veži. Konštantínovi však padla do oka jedna, na samom vrchu veže.

Veža pokušenia má 4 poschodia. Prvé, druhé a tretie poschodie tvoria kocku $3 \times 3 \times 3$ tak, že sa každé poschodie je tvorené 9 miestnosťami. Štvrté poschodie je tvorené len jednou miestnosťou uprostred, v ktorej čaká Konštantínova vyvolená. Do políčok druhého a tretieho poschodia veže diabol umiestnil dokopy najviac 8 dievčin tak, že žiadne dve nie sú v rovnakej miestnosti a na druhom poschodí žiadne dve nie sú ani v stenou susediacich miestnostiach.[5] Konštantín je na prvom poschodí a snaží sa dostať k svojej vyvolenej tak, aby nestretol inú dievčinu.[6] Konštantín sa vie pozrieť do ľubovolnej miestnosti, ktorá susedí **vrcholom**[7], hranou alebo stenou s miestnosťou, kde sa práve nachádza, čím zistí, či v danej miestnosti je dievčina. Avšak takéto pozretie ho stojí 1 drahocenný Elixír bystrozrakosti. Okrem toho sa Konštantín vie (zadarmo) presunúť do ľubovolnej miestnosti, do ktorej sa dokáže aj pozrieť. Koľko najmenej Elixírov bystrozrakosti si musí Konštantín zobrať, aby sa s určitosťou vedel vyhnúť všetkým dievčinám a šťastlivo sa dostal k svojej vyvolenej?

## 1.3 Konštantínova Múdrosť – Sofia ($\kappa \leq 1$) kategórie **alfa** a **beta**

Udýchaný Konštantín sa dostal na tretie poschodie, kde stretol svoju vyvolenú. „Aké jest meno tvoje, láska srdca môjho?“ opýtal sa Konštantín. Sofia povedala „Sofia, to jest múdrosť.“ Konštantín k nej natiahol ruku, nežne ju pohladil po tvári a pobozkal ju na pery. Vtom sa rozozvučal anjelsky chorál, Konštantína oslepilo nekonečné svetlo božskej žiary a v jeho rukách sa Sofia premenila na Knihu múdrosti. Konštantín pochopil toto božské znamenie. A tak sa pustil do štúdia Homéra, dialektiky, náuky filozofickej, rétoriky, aritmetiky, astronómie, muziky, astrológie, teológie, germanistiky, lingvistiky, indológie, práva, alchýmie, histológie, mechaniky, astrofyziky, botaniky, logopédie, fyziológie, politológie, kaligrafie, robotiky, kybernetiky, didaktiky, herectva, analýzy, aerodynamiky, akustiky, kognitívnej psychológie, genetiky, teatrológie, surdopédie, syntaxy, algebry, endokrinológie,

[4] $\overline{2X83}$ značí číslo zložené z cifier $2, X, 8, 3$ v danom poradí.
[5] V stropom susediacej miestnosti však dievčina byť môže.
[6] Teda aby nevstúpil do miestnosti, v ktorej je iná dievčina.
[7] Áno, naozaj aj vrcholom. Konštantín je zrejme bezrozmerný.

futurológie, ikonografie, chirurgie, byzantológie, bohemistiky, sexuológie, slovakológie, ekológie, klimatológie, oológie, mineralógie, ekonómie, pedológie I., pedológie II., ufológie, ...

... a geometrie. Majme všeobecný trojuholník $ABC$ s plochou $x$. V každom kroku môžeme presunúť iba jeden bod (ostatné 2 ostávajú na svojom mieste) tak, že obsah trojuholníka sa nezmení. Vieme postupnosťou týchto krokov presunúť vrcholy nášho trojuholníka do ľubovolnej trojice bodov $D, E, F$ takej, že obsah trojuholníka $DEF$ je $x$?

## 1.4 Kresťania Majstrami Sveta ($\kappa \leq 2$) kategórie **alfa** a **beta**

Roku 860 prišla za cisárom Michalom výprava Chazarov. Tí sa rozhodli toho roku usporiadať Majstrovstvá sveta v náboženstve. Michal mal teda vyslať Byzantskú reprezentáciu, ktorá by v Chersone vyzvala Židov a Saracénov na súboj vo viere. Michal teda poslal po vyučeného Konštantína Filozofa, aby s jeho bratom Metodom priniesli víťazstvo Byzancii a kresťanstvu. Tam v súboji rečníkov zúročil Konštantín vedomosti, ktoré nadobudol svojím štúdiom.

Konštantín riekol: „Budiž $n$ číslo kladné celé a nech $a(n)$ značí čísla $n$ súčin ciferný.

1. Najprv treba ukázati[8], že $a(n) \leq n$.
2. Potom treba riešenia rovnice $n^2 - 17n + 56 = a(n)$ nájditi.[9]"

## 1.5 Klamstva Moravu Sprostíme ($\kappa \leq 6$) kategórie **alfa** a **beta**

Zakrátko knieža Rastislav vyslal za cisárom Michalom poslov so správou: „My Slovieni však sme ľud prostý a nemáme toho, kto by nás viedol k pravde a jej zmysel nám vyložil. Nuž, vznešený/-á pane/pani, pošlite takého muža/ženu (nehodiace sa preškrtnite), ktorý/-á nám zariadi všecku spravodlivosť." Cisár Michal povedal Konštantínovi, ktorý sa práve vrátil z Chersonu so zlatou medailou na krku: „Čuješ, filozof, čo vraví? Iný to nemôže vykonať, leda ty. Hľa, tu máš hojné dary, vezmi si svojho brata Metoda a bež. Vy obaja ste Solúňanci a Solúňanci všetci hovoria čisto slovansky."

Potom sa Konštantínovi zjavil Boh a riekol: „Budiž $a$ a $k$ celé kladné čísla také, že $a^2+k$ deliace súčin $(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$ jest. Dokážte, že $k \geq a$."

Konštantín s Metodom sa neodvažovali oponovať ani Bohu, ani cisárovi a vybrali sa na Veľkú Moravu.

## 1.6 Kodifikujeme Mluvu Slovanskú kategórie **alfa** a **beta**

Cestou na Veľkú Moravu uvažoval Konštantín nad metodológiou edukácie teológie v reáliách slovanských. Ako erudovaný filozof po exorbitantnom elaborovaní prišiel na meritórnu ideu a riekol: „Čuj, Metod, Slovanom sa Božie slovo lepšie učiti bude, pokiaľ mu porozumäti schopní budú. Tož, pre jazyk slovanský, je potrebné písma vytvoriti, aby sme do jazyka ľudu slovo Božie mohli preložiti." A Metod odvetil: „OK."

Postup tvorby slovanského písma využíva rozpisovanie. Pod rozpísaním postupnosti rozumieme nasledovnú operáciu: Danú postupnosť prirodzených čísel $(a_1, \ldots, a_n)$ nahradíme postupnosťou $(1, 2, \ldots, a_1 - 1, a_1, 1, 2, \ldots, a_2 - 1, a_2, 1, 2, \ldots, a_3 - 1, a_3, \ldots, 1, 2, \ldots, a_n - 1, a_n)$, teda každý prvok $p$ nahradíme prvkami $1, 2, \ldots, p$. Konštantín si zo-

[8] ukázať
[9] nájsť

bral postupnosť $(1, 2, \ldots, 9)$ a rozpísal ju $n$-krát. Teraz ho zaujíma vzhľadom na $n$, koľko čísel bude v postupnosti a koľko z nich sú jednotky. To mu umožní konštantovať, či už ide o písmo finálne.

## 1.7 Kradnú Mi Staroslovienčinu

kategórie **alfa** a **beta**

Konštantín s Metodom na Veľkej Morave učili, učili, učili, až vyučili armádu učňov. Aby však mohli túto armádu použiť, museli ich nechať najprv vysvätiť. Vybrali sa teda do Ríma za pápežom Mikulášom I. Keď do Ríma dorazili, čakalo ich nepekné prekvapenie. Do cesty sa im postavili trojjazyčníci.

Trojjazyčník je hrozná potvora s troma jazykmi, ktoré sú označené $H, G, L$[10] a tvoria trojuholník. Na strane $HG$ sa nachádza bod $S$[11], pričom platí, že kružnice vpísané trojuholníkom $HLS$ a $GLS$ sa dotýkajú úsečky $LS$ v rovnakom bode. Dokážte, že bod $S$ je bodom dotyku vpísanej kružnice trojuholníka $HGL$ so stranou $HG$.

## 1.8 Koštantujeme Múdre Slová

kategórie **alfa** a **beta**

Nanešťastie, armáda učňov nebola ešte vysvätená, tak ju nemohli použiť proti trojjazyčníkom. Našťastie, Konštantín študoval geometriu, tak s nejakými trojuholníkmi si poradí. Potrebuje však, aby jeho argumenty padli na úrodnú pôdu.

Konštantín mal pred rečníckym súbojom s trojjazyčníkmi podiel počtu úspešných argumentov a počtu všetkých argumentov (úspešnosť argumentov) menší ako $p$, kde $0 < p < 1$. Počas súboja použil niekoľko argumentov tak, že po ňom mal celkový podiel počtu úspešných argumentov a počtu všetkých argumentov (úspešnosť argumentov) väčšiu ako $p$. Pre ktoré reálne $p$ musel mať nutne v nejakom momente súboja podiel počtu úspešných argumentov a počtu všetkých argumentov (úspešnosť argumentov) presne $p$?

## 1.9 Kláštor Miesto Smrti

kategória **beta**

Počas pobytu v Ríme sa Konštantínovi zjavil Boh a povedal: „Konštantín, verný služobník svetla si bol, no moja teta, Smrtka, sa už blíži. Je čas sa rozlúčiť so svätom svätským.“ Konštantín sa zľakol tejto správy. Bol to však fiškus, tak sa rozhodol, že sa skúsi pred Smrtkou ukryť. Vstúpil teda do kláštora, kde si nechal zmeniť meno na Cyril. V kláštore sa opäť venoval svojim duchovným radostiam, netušiac, že Smrtka sledovala jeho kroky.

Konštantínove kroky tvoria postupnosť kladných racionálnych čísel $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ definovanú ako

$$a_{n+2} = \frac{a_n + 2024}{1 + a_{n+1}}$$

pre $n \geq 1$. Určte najmenšiu možnú hodnotu $a_1 + a_2$ tak, aby všetky členy postupnosti boli celočíselné.

## 1.10 Keď Metoda Stratíš

kategória **beta**

Po úmornom rmútení za bratom sa Metod pobral späť na Veľkú Moravu. Jeho útrapám však nebolo konca. Cestou ho totiž zajali sily pekelné konajúce prostredníctvom tých najhorších z najhorších – Frankov. Tí priviazali Metoda k betónovému pražcu a išli sa zo svojho činu vyspovedať. Keď sa však vrátili, po Metodovi nebolo ani chýru, ani

[10] hebrejčina, gréčtina a latinčina
[11] staroslovienčina

slychu. Ako ho tak hľadali, narazili na studňu, pri ktorej stáli dvaja mládenci. Jeden z Frankov sa ich pýta: „Hallo Jungen, nevideli ste tu takého alte pána Metoda?“ Mládenci odvetili: „No, pred chvíľou tu taký starší pán prebehol a skočil do studne.“ „Aber, to nemohol byť náš Metod, on bol priviazaný o betónový pražec.“

Metodovi na dne studne neostávalo nič iné ako čakať na záchranu. Každý deň vyryl do kameňa inú postupnosť núl a jednotiek dĺžky 2023. Po $n$ dňoch bol zachránený. Keď si zoberieme všetky podpostupnosti[12] dĺžky 1012 všetkých postupností, ktoré Metod stihol za ten čas napísať, tak nedostaneme všetkých $2^{1012}$ binárnych postupností dĺžky 1012. Aké je najväčšie možné $n$?

[12] Podpostupnosť vznikne poškrtaním niektorých prvkov pôvodnej postupnosti. Napríklad $\{2, 3, 5, 7\}$ je podpostupnosť postupnosti $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$