



Zadania 2. kola letnej časti

Termín odoslania 18. marec 2024 (pre zahraničie 15. marec 2024)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

2.1 Košiar Malamut Stráži ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

Milý denníček,

pamätáš sa na ten košiar, ktorý podával tú lahodnú jahňacinku... Ten sviniar Dunčo sa vrátil z dovolenky a hneď je to iná pesnička. Ani som sa usadiť nestihol a už ma hnal. Od hladu neviem ani zaspať. Skúšal som počítať ovečky, ale myslím, že to môj problém len zhoršilo.

Napočítal som o oviec, b baranov a j jahniatok, pričom o , b , j sú celé (možno aj záporné) čísla. Navyše platí, že $o^2 + b^2 + j^2 = 2bj + 1$ a tiež $2o + b + j = 2024$. Určte všetky možné trojice (o, b, j) , ku ktorým som sa mohol dopočítať.

2.2 Kozliatka Ma Spoznali ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

Milý denníček,

ako som sa tak poneviera po lese, naďabil som na malú chalúpku, v ktorej bývajú šfavnaté kozliatka. Mama koza nebola doma, tak som sa rozhodol využiť situáciu. Zaklopal som na dvere a hovorím: „Kozliatka, kozliatka, otvorte mi vrátka. To som ja, vaša mamička.“ V duchu som bol na seba mimoriadne pyšný, že som s takým úskokom prišiel. Kozliatka však spoznali, že môj hlas neznie ako ich mamička, takže som nepochodil. Cestou lesom som však našiel katalóg miestnej kliniky, ktorá okrem iného ponúka úpravu hlasu.

Klinika ponúka štyri druhy operácie na zmenu hlasu. Každá operácia má n -miestny identifikačný kód zložený z 0 a 1.¹ Aby sa predišlo chybám, sú kódy urobené tak, že ak pacient pri diktovaní spraví nanajvýš jednu chybu (teda namiesto jednej 0 povie 1 alebo naopak), tak doktor vie jednoznačne určiť, ktorú operáciu mal pacient na mysli. Určte najmenšie n , pre ktoré môžu takéto identifikačné kódy existovať, a vysvetlite, prečo menšie n nevyhovuje.

2.3 Krása Melodického Sopránu ($\kappa \leq 1$)

kategórie **alfa a beta**

Milý denníček,

dnes som teda bol na tej operácii na zmenu hlasu. Z katalógu som si vybral „Hlas mamičky kozy“.

Hlasivky majú tvar ostrouhlého trojuholníka. Kozliatka dokážu z hlasu určiť uhly tohoto trojuholníka, pričom vedia, že ich mama nemá ani pravouhlé, ani rovnoramenné hlasivky. Aby mali istotu, využívajú bezpečnostné číslo $b \geq 0$, ktorým sa riadia nasledovne:

- Ak sa niektoré dva uhly trojuholníka líšia o menej ako b stupňov, tak ho považujú za rovnoramenný.
- Ak sa niektorý uhol trojuholníka líši od pravého uhla o menej ako b stupňov, tak ho považujú za pravouhlý.

¹Kód môže začínať aj číslicou 0.

Určte, aké najväčšie môže byť b , aby existoval **ostrouhlý** trojuholník, ktorý nepovažujú ani za pravouhlý, ani za rovnoramenný.

Išlo to hladko, ale dnes sa musím šetriť, takže za kozliatkami pôjdem až zajtra.

2.4 Klamstvo Miesto Smrti ($\kappa \leq 2$)

kategórie **alfa** a **beta**

Milý denníček,

dnes som bol za tými kozliatkami, ale nedopadlo to bohvieako. Samozrejme, kozliatka mi otvorili vrátka, tak som ich všetky zhltoľ. Taký som bol plný, že som sa nevládal pohnúť. Preto ma načapala mama koza vo svojom vlastnom dome a ľahko si domyslela, čo sa stalo. Chcel som sa vyhnúť bitke, nuž som povedal: „Prepáčte mi, mama koza, nevedel som, že sú vaše. Viete, ja som vegetarián, ja papám iba sirôtky.“ Uverila mi a všetko bolo odpustené, len som musel ísť na operáciu, aby mi kozliatka z brucha vytiahli.

V čakárni pred operáciou sme hrali s mamou kozou karty. Na nich boli celé čísla od 1 po $2k$ vrátane, pričom každá kartička mala práve jedno číslo a žiadne dve kartičky nemali rovnaké. S mamou kozou sme si ich náhodne rozdelili na polovicu a hrali sme nasledovne:

- Ja a mama koza sme sa striedali v ťahoch, pričom som začínal ja.
- Hráč na ťahu musí vyložiť jednu kartičku s číslom m takú, že je m menšie ako všetky alebo väčšie ako všetky ostatné už vyložené kartičky. (Ak nie je na stole žiadna karta, tak hráč môže vyložiť ľubovoľnú.)
- Ak hráč nemôže vyložiť na ťahu žiadnu kartičku, prehral. (Aj ak minul všetky svoje kartičky.)

Určte víťaznú stratégiu pre jedného z hráčov na základe začiatočného rozdelenia kariet.

2.5 Košík Ma Sýti ($\kappa \leq 6$)

kategórie **alfa** a **beta**

Milý denníček,

už piaty deň som nejedol. Dnes som stretol v lese také dievča v červenej čiapočke. Keď ma zbadala, vzala nohy na ramená. Netušil som, že ľudia sú až takí ohybní. Za normálnych okolností by som ju aj tak zožral, ale po dvoch operáciách som sa na naháňačku úplne necítil. Našťastie, po dievčine zostal košík s jedlom a pohľadnicou.

Pohľadnica mala tvar lichobežníka $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok E , pričom platí $|BC| = |CD| = |DA|$. Bod S je stred kružnice opísanej lichobežníku $ABCD$, bod Q je stred kružnice opísanej trojuholníku ABE . Dokážte, že trojuholníky DSC a AQE sú podobné.

Z pohľadnice som sa dozvedel, že dievčina má babičku, ktorá býva sama. To by mohla byť ľahko uloviteľná potravina.

2.6 Korisť Moju Sledujem

kategórie **alfa** a **beta**

Milý denníček,

ako sa ukázalo, babička „červenej čiapočky“ býva v paneláku, takže len jej adresa mi je nanič.

Babičkin panelák má prízemie a n poschodí. Medzi poschodiami sa dá chodiť po schodisku. Babičke trvá prekonanie vzdialenosti medzi dvoma susednými poschodiami konštantne celočíselný počet $v \geq 1$ sekúnd a prechod zo schodiska do vlastného bytu opäť celočíselný počet $h \geq 1$ sekúnd. Ja však tieto konštanty nepoznám.

V košíku „červenej čiapčky“ však bol špeciálny ďalekohľad, ktorým môžem každú sekundu sledovať jedno konkrétne poschodie paneláku. Kvôli stenám a iným zábránam však ďalekohľadom nedovidím na schodisko – to znamená, že babičku uvidím na prízemí a potom až vtedy, keď sa na svojom poschodí poberie do svojho bytu.

Uvidel som babičku vojsť na schodisko. Vzhľadom na n nájdite najmenšie možné h také, že viem s istotou určiť, kde babička býva, bez ohľadu na hodnotu v .

2.7 Karkulkiné Marinované Stehienka

kategórie **alfa** a **beta**

Milý denníček,

mám za sebou tretiu operáciu. A to som preukázal svoj um a prekabátil som aj „červenú čiapčku“, s ktorou som vôbec nerátal. To už som mal v sebe babičku, takže to bola hostina. Ale s horárom som si poradiť nedokázal, keďže tu nemohla o sirôtkach byť žiadna reč. Ale poviem Ti to radšej celé postupne.

Budem ti postupne rozprávať čísla. Začnem číslom $x_1 = 2$ a potom si každé ďalšie číslo spočítam z toho predošlého ako $x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1-2x_n}$. Ak narazím na čísla 0 alebo $\frac{1}{2}$, skončím. Dokážte, že nikdy neskončím.

2.8 Kameň, Moruša, Slama

kategórie **alfa** a **beta**

Milý denníček,

dnes som sa zobudil s chuťou na bravčovinu, i keď po týždni bez jedla by som zjedol aj sirôtky zo záhrady. Vydal som sa teda do Prasačiniac, aby som si pochutil. Hneď skraja dediny som videl slamený domček. Tak som doň fúkol, až po ňom nič neostalo. Ale domáceho nikde. Hneď vedľa stál druhý domček, tentoraz drevený. Tak som doň fúkol, až po ňom nič neostalo, ale domáceho opäť nikde.

Tretí dom bol z kameňa a popísaný číslami. Spredu vyzeral ako tabuľka $n \times n$, pričom $n \geq 3$. V každom políčku je vpísané číslo 1 alebo 2, pričom v každom obdĺžniku 2×3 alebo 3×2 je párny súčet. Vzhľadom na n určte, koľkými spôsobmi mohla byť takáto tabuľka vyplnená.

Nech som fúkal, ako som fúkal, tento dom som nerozfúkal.

2.9 Kruté Majetnícke Svine!!

kategória **beta**

Milý denníček,

tolká to nespravodlivosť!! Nielenže som sa včera nenajedol, ale tie svine si pýtajú odškodnenie za ujmu na majetku! Tak som sa napajedil, že som sa vybral do toho kamenného domu, že ich zožeriem!! Keďže ma však nechceli vpustiť dnu vrátkami, vybral som sa komínom! Tešil som sa, ako s nimi vypečiem, ale nakoniec vypekali niečo oni!! Tak som sa spálil, že som rovno uháňal preč! Asi im budem musieť nakoniec zaplatiť!!

Majiteľovi slameného domu dlžím p peňazí, majiteľovi dreveného domu dlžím q peňazí a majiteľovi kamenného dlžím r peňazí. Platí, že p, q, r sú prvočísla spĺňajúce

$$p!q!r! \mid (p+q)!(p+r)!(q+r)!,$$

pričom $!!$ označuje dvojité faktoriál, teda $0!! = 1!! = 1$ a $n!! = n(n-2)!!$. Nájdite všetky také trojice prvočísel (p, q, r) .

2.10 Konečne Mám Šťastie

kategória **beta**

Milý denníček,

dnes za mnou prišiel exekútor, keďže som nemal dosť peňazí na zaplatenie dlhu. Normálne mi vošiel až do nory. Tak som ho zožral. Konečne viem, ako vyzerá šťastie.

Šťastie má tvar trojuholníka ABC so stredom opísanej kružnice O . Bod T je na výške na stranu AB taký, že $|\sphericalangle TBA| = |\sphericalangle ACB|$. Priamka CO pretína stranu AB v bode K . Dokážte, že os strany AB , výška na BC a úsečka KT sa pretínajú v jednom bode.