



Zadania 3. kola letnej časti

Termín odoslania 15. apríl 2024 (pre zahraničie 12. apríl 2024)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

3.1 Kraj Mátožnej Smrti ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

Zlovestné mračná sa preháňali oblohou nad tmavým lesom. Slnko nebolo vidno, nedalo sa však povedať, či je noc, alebo deň. Temnotu preťal blesk. Na krátky moment osvietil mohutný hrad na vrchu zradného útesu. K nemu sa po úzkej cestičke približovalo malé svetielko...

Keď Sherlock s Watsonom prišli do hradnej záhrady, nad telom už stála skupinka postáv. Vo svetle lampáša rozoznali 5 osôb. Mŕtvolou bol hradný záhradník. Nikto z hradu od vraždy neodišiel, takže jedna z piatich osôb je vrah.

Sherlock si zapálil fajku a vypustil obláčik dymu. Ten mal tvar kocky $n \times n \times n$, kde $n \geq 2$. Táto kocka bola vyskladaná z kvádkov $1 \times 1 \times n$. Je možné, že obsahovala kvádkik otočený v každom z troch možných smerov? Svoju odpoveď zdôvodnite.

3.2 Kreslíme Mŕtvoľe Siluetu ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

„Vážení, prosím, odšúpte. Detektív Holmes potrebuje na svoju prácu priestor.“

„Watson, to nebude nutné. Podľa stôp je zjavné, že tadiaľto išiel niekto s kladivom. To je potenciálna vražedná zbraň. Všimli ste si to logaritmické pravítko v tých kričkoch za nami? Tak človek s ním a človek s kladivom tu boli tesne po sebe, i keď neviem, v akom poradí. Som tiež presvedčený, že tie stopy, ktoré sem išli z dediny, tiež pribudli tesne pred logaritmickým pravítkom alebo tesne po ňom. Niekto z týchto ľudí má alibi, lebo zjavne bol v čase vraždy v dedine.“

„A čo napríklad mačeta, Sherlock, to by mohla byť vražedná zbraň.“

„To rozhodne. Tú sem niekto doniesol tesne pred hentou varechou alebo tesne po nej.“

Kým sa Sherlock vybral rozprávať s podozrivými, Watson obkresľoval mŕtvolu, lebo tak sa to skrátka robí.

V hradnej záhrade tvaru obdĺžnika $ABCD$ vyznačil body M_1 , M_2 , M_3 a M_4 tak, že M_1 je stred strany CD , M_2 je stred AM_1 , M_3 je stred BM_2 a M_4 je stred CM_3 . Určte, akú časť obdĺžnika $ABCD$ tvorí štvoruholník $M_1M_2M_3M_4$.

3.3 Kuchár Mieša Suroviny ($\kappa \leq 1$)

kategórie **alfa a beta**

„A čo je toto?“ spýtal sa Sherlock dvíhajúc zo zeme handrovú postavičku.

„To je voodoo bábika. S tou som, ehm, zaklínal, ehm, v čase vraždy,“ povedala jedna z postáv. Sherlock sa otočil za hlasom.

„Takže je to niekoho z vás. A čo tá varecha?“

„Tá je moja. Viete, ja som tu kuchár. Iba varím, a to je celé,“ ozval sa ďalší hlas.

Dokážte, že pre všetky celé čísla n je

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$$

celým číslom.

3.4 Krutá Matematická Strata ($\kappa \leq 2$)

kategórie **alfa** a **beta**

„Džentlmeni, neradno nám vonku takto postávať. Čo keby sme sa presunuli ku mne dnu? Za chvíľu isto vyjde slnko a svit si bezpečnejšie užijeme zvnútra.“

„Takže Vám to tu patrí?“ opýtal sa Sherlock. „Vy musíte byť teda pán Drakula. Prečo máte také veľké zuby?“

„Aby som sa mohol lepšie usmievať,“ odvetil Drakula.

„Tie vyzerajú mimoriadne nebezpečne. Mohli by veľmi ľahko niekomu ublížiť, či dokonca zabiť,“ podotkol Watson.

„Počujte, páni detektívi,“ ozval sa im spoza chrbta hlas, „volám sa Gašpar Daikeš a niekde som tu stratil svoju funkciu. Nepomohli by ste mi ju nájsť, keď už ste tu?“

„Funkciu?“ začudoval sa Watson. „Áno, funkciu. Ešte ste o nej nepočuli, pán Watson?“ odvetil Daikeš. „Moja funkcia nie je len taká dáka obyčajná. Nech si vymyslíte ľubovoľné dve reálne čísla x a y , funkcia f pre ne určite bude spĺňať rovnosť

$$f(x)f(y) + f(xy) = x + y,$$

nedal sa zastaviť Daikeš.

„Ale, ja neviem ako by sa taká funkcia mala hľadať,“ smutne odvetil Watson. „A vy ste nečítali detektívnu príručku k **funkcionálnym rovniciam**¹?“ opýtal sa zmätene Daikeš.

Pomôžte Watsonovi nájsť všetky funkcie, ktoré mohli patriť Gašparovi Daikešovi.

3.5 Kúty Mnohých Sietí ($\kappa \leq 6$)

kategórie **alfa** a **beta**

Keď sa naši detektívi s podozrivými usadili v čajovom salóne², Sherlock spustil paľbu otázok.

„Kto ste a čo ste robili v čase vraždy?“ prst zaboril do jedného z prítomných.

„Ja... Ja som Sancho? Ja som Sancho,“ vyjachtal Sancho. „V čase vraždy som krmil netopiere. Určite Vám to dosvedčia.“

„A Vy?“ ukázal prstom na ďalšieho z podozrivých.

„Viete, ja som exekútor. Prišiel som robiť súpis majetku. V čase vraždy som počítal pavúcie nožičky. Viete, aké je to namáhavé?“

¹https://seminar.strom.sk/media/uploads/funkcionalne_rovnice.pdf

²a doplnili si 1 život

V tomto sídle sa nachádza k pavúkov a $2k$ kútov. Každý pavúk má pavučinu práve v k kútoch, pričom každá dvojica pavúkov zdieľa najviac 2 kúty, v ktorých majú obaja pavučinu. Určte všetky k , pre ktoré to ide.

3.6 Konanie Manželka Skrýva

kategórie **alfa** a **beta**

„A Vy?“ ukázal Sherlock na jedinú ženu v miestnosti.

„Ja sa volám Winnie,“ odpovedala.

„A v čase vraždy ste...“

„V čase vraždy som bola manželka zavraždeného,“ odvetila bez mihnutia oka.

„Takže ste manželka,“ zopakoval Sherlock. „To však nič nehovorí o tom, čo ste v čase vraždy robili. Prečo nám to nepoviete?“

„Poviem vám to, až keď nájdete také kladné celé číslo n ,“ udrela pästou do stola, „a také celé číslo m ,“ udrela znova, „že splňajú vzťah

$$3n^2 + 3n + 7 = m^3.$$

Dokážte, že Sherlock také čísla m , n nenájde, lebo neexistujú.

3.7 Kečku Musím Schladit'

kategórie **alfa** a **beta**

Sherlockovi sa od snahy rozlúsknuť prípad až parilo z kečky. Rozhodol sa teda aspoň tentoraz sňať z hlavy svoj povestný klobúk, aby ju na chvíľu schladil. V klobúku našiel kúsok papiera, na ktorom bolo napísané:

„Dávajte si pozor na tretiu osobu na mieste činu. Mám dôkazy, že počas vraždy zavýjala na mesiac.“

Sherlock papier otočil, aby zistil, kto mu tento zvláštny odkaz poslal. Namiesto podpisu však na druhej strane našiel:

„Máme n rôznych guľôčok, označených nie nutne rôznymi číslami, pričom na každej guľôčke je práve jedno číslo. Zobrali sme si každú podmnožinu guľôčok (aj prázdnu) a spočítali sme súčet čísel na týchto guľôčkach.³ Počet rôznych súčtov som si napísal na čelo. V závislosti od n určte, koľko rôznych čísel som si mohol na čelo napísať.“

3.8 Kohosi Mdloby Skolili

kategórie **alfa** a **beta**

Sherlock síce z lístka nezistil, kto mu ho poslal, ale vnuklo mu to zaujímavú otázku.

„Kto z vás bol na mieste činu ako prvý? Kto našiel mŕtvolu?“

„Ja,“ ozval sa jeden z prítomných.

„A vy ste?“ vyzvedal Sherlock.

„Remi, pán detektív.“

„Nuže, Remi, opíšte nám, čo ste na mieste činu videli.“

„No, viete, pán detektív, išli na mňa vcelku mdloby z pohľadu na mŕtvolu, takže som videl také zvláštne obrazce.“

³Súčet prázdnej množiny čísel je 0.

Celé to začalo trojuholníkom AB_0C_0 s ortocentrom H_0 . Pre každé prirodzené n definujeme B_n ako kolmý priemet C_{n-1} na AB_0 , C_n definujeme ako kolmý priemet B_{n-1} na AC_0 a H_n definujeme ako ortocentrum trojuholníka AB_nC_n . V závislosti od veľkosti uhla B_0AC_0 a od dĺžky úsečky B_0C_0 určite, čomu sa rovná

$$\sum_{k=0}^{\infty} |AH_k|.$$

3.9 Krásy Mysle Sherlockovej

kategória **beta**

„A ostatní?“ prerušil Sherlock Remiho monológ. „Kedy ste prišli Vy na miesto činu, pán gróf?“

„Viete, ja si nepamätám, bol to vcelku šokujúci nález. Som si však istý, že som prišiel okamžite po pánovi exekútorovi.“

„A Vy, pane?“ opýtal sa Sherlock sluhu.

Sluha, vytrhnutý z driemot, sa spamätal. „No... Ja som bol na mieste činu skoro naraz s Remim, pán detektív. Nie som si istý, či som prišiel tesne pred ním, alebo tesne po ňom.“

Teraz sa už Sherlock skutočne začal blížiť k riešeniu. Jeho myseľ totiž pracuje ako počítač – v binárnej sústave. Riešenie prípadu si môžeme predstaviť ako kladné celé číslo n . Povieme, že číslo n je *blízko*, ak jeho zápis v dvojkovej sústave končí na jeho zápis v desiatkovej sústave. Napr. číslo 10 zapíšeme v dvojkovej sústave ako 1010, čo končí ciframi 10. Takže číslo 10 je *blízko*. Nájdite všetky kladné celé čísla n , ktoré sú *blízko* a v desiatkovej sústave majú najviac dve cifry 1.

3.10 Kto Mohol Strieľať?

kategória **beta**

Watson vytiahol Sherlocka z miestnosti, aby sa mohli poradiť.

„Je to skutočne veľmi zapeklitý prípad, Sherlock,“ povedal Watson. „Máme tu päť podozrivých – exekútora, grófa, kuchára, manželku a sluhu. V nejakom poradí prišli na miesto činu, ale každý z nich má alibi. Nieкто bol počas vraždy v dedine a ostatní sa v tom čase venovali nejakej inej činnosti. A potom sú tu tie stopy na mieste činu. Aj tých je päť – voodoo bábika, varecha, logaritmické pravítko, funkcia, a ampulka...“

„Ampulka? Prečo mi to hovoríte až teraz, Watson? V tej mohol byť jed. Ten by mohol byť ďalšou vražednou zbraňou!“

„No, vidíte, Sherlock. Ešteže ma máte.“

„Ale kdeže, milý Watson. Strieľam si z Vás. Tak, ako si niekto vystrelil zo Záhradníka. Videli ste snáď tú stopu po guľke. Je to prosté, milý Watson, aj keď mal každý podozrivý prístup k jednej zo zbraní, vrah určite použil guľomet.“

Sherlock vie, že guľky z guľometu sú očíslované číslami a_1, a_2, \dots, a_n z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Dokážte, že pre $n \geq 2$ platí

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_1} + \dots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}} + (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_{n-1})(1 - a_n) \leq 1.$$